
.	1
A.	1
B.	3
C.	3
D.	4
E.	5
.	6
A.	6
1.	6
2.	7
3.	8
B.	(Protocol methods)	12
1.	(Talking aloud method)	12
2.	(Clinical Interview)	13
3.	14
.	15
A.	15
B.	15
C.	17
D.	18

.	20
A.	20
B.	21
.	34
A.	34
B.	35
	37
ABSTRACT	39
< A>	42
< B>	46
< C>	(Verval protocol)	47
< D>	54

< - 1>	16
< - 1>	22
< - 2>	23
< - 3>	24
< - 4>	25
< - 5>	26
< - 6>	27
< - 7>	28
< - 8>	29
< - 9>	30

(:)

.

:

1.

가?

가

2.

가?

2 2 100
 가
 14 , 13 14
 , 1 12
 가 ()
 , , , ,
) , ,
 :
 , 11%
 , 24% 가 , 65%
 , 4%
 , 7% 가 , 89%
 ,
 (28%), (24.3%), (15.8%),
 (10.9%), (9.7%)
 ,
 (47.8%), (21.4%), (15.5%),
 (9.6%), (4.2%), (1.2%)
 , ,
 가

.

A.

가 가 가 .
가 .

“ ,

,

” . 가

, 가 ,

, , ,

, ,

, ,

,

, ,

.

, 가

. - , -

.

(Davis & Dinner, 1986 ; Sierpinska, 1987). 가

Cauchy , 가 ,
(formal definition) ,

가 가 . 가,

가,
가
,
,
,
(
)
(Protocol methods) 가
(Clinical Interview)
. Clayton(1990)
가 가
. 가 : ,
,
,
,
,
가
,

, ,
 .
 , : , ,
 .
 , : , ,
 , : .
 , : .
 , : ,
 가 가 .

D.

가 2 2
 가 ,
 .

E.

,

,

A.

1.

, , 가 . Strike(1983)
,
, , 가
Newell(1972) 가 가
Anderson(1986) 가
Hashweh(1986)
, 가 가

McClosky(1983)

· ,
· 가
가 .

2.

a)

가 가
· ,
· ,
· , , ,
· , 가
· .

Driver(1985)

가 ,
가 ,
· ,
가 .

가

(Sowder, 1988).

Babbit(1990) 5 6 가
1

가 4 NAEP(Kouba,
Brown, Carpenter, Lindpuist, Silver, & Swafford, 1988)

431 5 6

Babbit(1990) : ,
가

(Liedtke, 1988)

가 (Kouba et al., 1988 ; Muth, 1984
; Syndam & Riedesel, 1969). , 5 6 13 18%가

(Babbit, 1986).

7 15% (Kouba et al., 1988). 5 6 30%

. Kouba et al.(1988) 7

23%가 가

가 ,

(Bell, Costello, &

Kuchman, 1983).

5 6

. 5 6

가

: , , , .
.
 , 가

.
, , , .
,

(Sowder, 1988).

가

가

가 , .
가 .

.
,
. ,
.

. Kouba et al.(1988) 3 26%, 7 16%가 가

. 5 6 20%가

(Babbit, 1986).

. : 가 .
, 가

가

가

B. (Protocol methods)

1. (Talking aloud method)

(Protocol)

가

가

2. (Clinical Interview)

가

가

가

“ ”

“ ”

가

가

가

가 .
()
,) 가 (,
, 가 ,
3.
가 가
, ,
, 가 ,
가 .
가 .

A.

가 $2^{12} \cdot 2^2 \cdot (\quad) 101$.
(
) , .

B.

1.

가
가 .
가
S
10
: (1) , (2)
, (3)
(4) , (5) , (6)

(1) 가 (2) .
 , (3) .
 가 , (4)
 가 , (5)
 가 , (6)
 ,

< -1 >

1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.	.	
7.	.	
8.		
9.	.	
10.	.	
11.	.	
12.	.	
13.		
14.		

C.

1.

가
,
(S 2 (99) 1999 6
8 . 80%
2 .

2.

2 2 (101)
:
a)
b) 50
c)
d)
e)
1999 7 13 , 100%

3.

‘ 1’ , 가
가 (1) (2) , ,
’

‘ 2’ ,
, ,

‘ 3’
(Verval protocol)

“ ”
“ ”
.

가 .

.

A.

,

:

.

,

가

.

,

.

1.

가

2.

,

. ,

3.

, ,

4.

, ,
,
.

5.

.

6.

가 , 가
가 ,

B.

1. 1 :
가 가?

1

(1) 13 :

가

,
.

< -1 >

()	(%)	(%)	(%)
100	11	24	65

< -1> ,
11%, 24%, 65% 89%

· 가 가

· 가

· 0 0 가 가

· 가

· , 가

(2) 14 :

,

< -2 >

()	(%)	(%)	(%)
100	4	7	89

< -2 >

11%, 10%, 79% 89%

.
.
.
.
.

가 가
가

2. 2 :

가?

- 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11
- 6, 7, 9, 10, 12

< -3 >

	A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)	F (%)	
	23 (7.1)	123 (38.4)	46 (14.3)	45 (14)	64 (20)	19 (5.9)	320
	20 (24.3)	9 (10.9)	23 (28)	8 (9.7)	13 (15.8)	9 (10.9)	82
	3 (1.2)	114 (47.8)	23 (9.6)	37 (15.5)	51 (21.4)	10 (4.2)	238

< -3 >

B, 가 38.5% 가
 E, 가 20.5%
 D, C,
 가 14.4% 14% , A, F,
 7% 4%

가 .

(1) 1, 2, 3, 4 :

< -4 >

	(%)	(%)	(%)							
				A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)	F (%)	
1, 2, 3, 4	32	35	33	18 (52.9)	.	.	.	10 (29.4)	6 (17.6)	34

< -4 > , 32%,
 35%, 33% , A 가 가 52.9%
 가 , E 가 29.4%가 . F
 17.6% .

(2) 5, 8 ;

< -5 >

	(%)	(%)	(%)							
				A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)	F (%)	
5,8	49	17	34	2 (12.5)	9 (56.2)	2 (12.5)	.	1 (6)	2 (12.5)	16

< -5 > 49%,
 17%, 34% . A B 가
 12.5% 56.2% , C, E 12.5% 6%가
 . F 12.5% .

(3) 6, 7 :

< -6 >

	(%)	(%)	(%)							
				A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)	F (%)	
6	32	27	41	1 (1)	21 (39.6)	.	2 (3.7)	25 (47.1)	4 (7.5)	53
7	23	31	46	.	26 (55.3)	1 (2.1)	4 (8.5)	15 (31.9)	1 (2.1)	47

< -6 > 6 32%,
 27%, 31% . E 가 가 47.1%,
 B 39.6%, F 7.5%, D 3.7% .
 7 23%, 31%, 46% .
 6 B 55.3% 가 , E 31.9%, D
 8.5%, C F 2.1% .

(4) 9, 10 :

< -7 >

	(%)	(%)	(%)							
				A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)	F (%)	
9	11	65	24	1 (1.6)	41 (66.1)	2 (3.2)	13 (20.9)	5 (8)	.	62
10	4	45	51	.	18 (47.3)	.	9 (23.6)	6 (15.7)	5 (13.1)	38

< -7 > , 9 11%,
 65%, 24% . B 66.1%가 가 ,
 D 20.9%, E 8%, C 3.2%,
 A 1.6% . 10 4% ,
 45%, 51% . B 47.3% 가
 , D 23.6%, E 15.7%, F 13.15 .

(5) 11 : .

< -8 >

	(%)	(%)	(%)							
				A (%)	B (%)	C (%)	D (%)	E (%)	F (%)	
11	16	46	38	.	.	21 (65.6)	8 (25)	2 (6.2)	1 (3.1)	32

< -8 > 11 16% ,
 46%, 38% . C 65.65%가 가
 , D 25%, E 6.2%, F 3.15 .

(6) 12 :

< -9 >

	(%)	(%)	(%)	A	B	C	D	E	F	
				(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	(%)	
12	9	44	47	1 (2.8)	5 (14.2)	20 (57.1)	9 (25.7)	.	.	35

< -9 > 12 9% ,
 44%, 47% , C 57.1%가 가
 , D 25.7%, B 14.2%, A 2.8% .

1. 1

(1) , (2)

가 .

, 11%
 , 24% 가 , 65%

. 가 가
 . 가
 . 0 0 가 가
 . 가
 . , 가
 .
 . 가 ,
 , 7% 4% 가 ,
 89%
 , 가 가
 . 가 가
 . 가 가
 . 가
 . 가

가

가

2. 2

320

가 82 , 가 238 가

, C 28% 가 A ,
가 24.3% E ,
15.8% , B F 10.9% D
9.7%가
, B 47.89%가
, E 21.4% D
가 15.5% , C 9.6% ,
, F 4.2% , A 1.2%

.
,
.
,
.
.
,
가 .
가 .

가
가
.
가

A.

2

가

가

: (1)

가

가? (2)

가? (3)

, 2

2

100

가

가

14

,

1, 2, 3, 4, 13, 14

,

5 12

가

(

,

,

)

가

가

가

가

B.

가

(1992). _____ : _____ .

(1999). _____ 3 _____ 1 _____
 _____ , _____ .

(1991). _____ , _____ .

(1995). _____ , _____ .

(1993). _____ , _____ .

(1993). _____ , _____ .

(1997). _____ 2 _____
 _____ , _____ .

(1998). _____ , _____ .

(1993). _____ : _____ , _____ .

_____ , _____ , 『 _____ 』 , () _____ , 1989.

3 (1995). _____ () .

_____ (1991). _____ .

2 (1999). _____ () .

(1990). _____

_____.
(1993). _____.
(1996). _____.

- Babbit, B. C.(1990). *Error pattenin problem solving*. Paper presented at the International Conference of the Council for Learning Disabilities. ED 338 500. pp. 1-11.
- Radatz, H.(1979). Error analysis in mathmatics education. *Jounal for Resarch in Mathmatics Education*. 10. 163-172.
- Kirby, W.N.(1992). *Gvidelines for teaching calculus*. Texas Education Agency. ED 349 179.
- Shoenfeld, A. H. (1980). Teaching problom solving skills. *The American Mathmatical Monthly*. 87 10.

ABSTRACT

An Analysis on Misconceptions and Errors on limit of sequence and sum of series

Noh, Su Jin

**Major in Mathematics Education
Graduate School of Education
Korea National University of Education
Chung Buk, KOREA**

Supervised by Professor, Cho, MinShik, Ph. D

The purpose of this study is the following : We investigate on misconception on limit of a sequence and limit of a series Moreover, We analyze their error pattern in the problem solving processes of limit of a sequence and limit of a series.

Subjects are 100 students selected from the 2nd grade of high school located in Kwang Myung.

The test instrument is 14 items consisting of 12 items for analyzing problem solving patterns of limit of a sequence and limit of a series and 2 item for investigating students' misconception on limit of a sequence and a series. The percentage correct answer was examined.

The results drawn from this study are as follow :

First, only 11% and 4% of students correctly understood the definition of limit of a sequence and the definition of a series.

Second, error patterns on problem solving patterns of limit of a sequence 1) misunderstood theorem or definition (28%) 2) misused data (24.3%) 3) omission of solving process (15.8%) 4) misinterpreted language and ambiguity of error (10.9%) 5) technical errors (9.7%)

Third, error patterns on problem solving patterns of limit of a series. 1) misinterpreted language (47.8%) 2) omission of solving process (21.4%) 3) technical errors (15.5%) 4) misunderstood theorem of definition (9.6%) 5) ambiguity of error (4.2%) 6) misused data (1.2%)

Fourth, students' errors in solving problems were corrected students thought of limit of sequence and limit of series as different concepts, didn't have correct concepts on limit and made a lot of errors in solving problems. Most of the misconcepts and errors could be corrected at the interview.

The conclusions of this study are as follows :

First, most students didn't understand the limit correctly.

In the teaching - learning processes of limit, it is necessary to emphasize the definition and the concept of limit, and to present various examples of limit, and it is necessary to emphasize that limit of sequence and limit of series are not different concepts.

Second, in problem solving processes of limit of sequence and limit of series, six error patterns are classified. The proposed patterns could help

teachers diagnose students' difficulties and remedy the patterns of error.

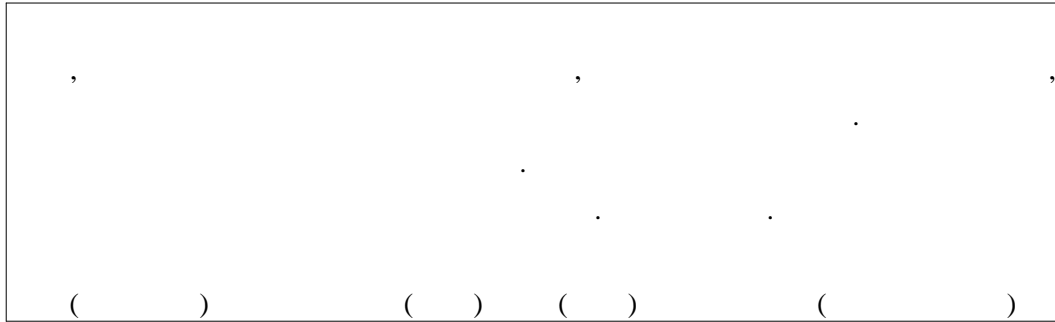
Third, in the process of remedying their errors, it is found out that students thought of limit of sequence and limit of series as different concepts and they have difficulties in analyzing mathematics language and solving problems. Also, in spite of these similar problems, suggesting the problem structure exchanged, the application ability become decreased.

Since most students are willing to solve the problems with only memory of the problem diagrammatized in the state where they completely don't understand the concept.

Therefore, a lot of time should be spent for concept instruction and textbooks will need to be described precisely.

A thesis is submitted to the committee of Graduate School of Korea National University of Education in fulfillment of the requirement for the degree of Master of Education in February, 2000.

< A >



1. $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 가 ? .

2. $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 가 ? .

3. $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{a_n \cdot b_n\}$ 가 ?

4. $\{a_n\}$ $\{b_n\}$,

1) $\{a_n \cdot b_n\}$ 가? .

2) $\{a_n + b_n\}$ 가? .

5. $1, -1, 1, -1, \dots$.

6. $1-1+1-1+1-\dots$ 가 .

7. $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

8. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$.

9. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 가?

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

11. x .

$$\left\{ \left(\frac{x}{2} \right)^n \right\}$$

12. 가 x .

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \dots$$

13. () .

14. .

< B >

1. .
2. 가?
3. 가?
4. 가?
5. 가?
6. 가?
7. 가?
8. 가?
9. 가?
10. 가?
11. 가?
12. .
13. 가 가?
14. 가?
15. 가 가?
16. 가?

$a_n \cdot b_n$! $a_n \cdot b_n$ 가?

$: a_n = b_n = (-1)^n$

: 가

: 가

가

:

5)

6) : 가 ?

: 가

:

가 ?

:

:

:

:

가 ?

가

.
:
:
:
:
:()

가

가 . ()

$$\begin{aligned} 1) \quad 1-1+1-1+\dots &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \\ &= 0+0+0+\dots = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 1-1+1-1+\dots &= 1-(1-1)-(1-1)-\dots \\ &= 1-0-0-\dots = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & S \\ S &= 1-1+1-1+\dots \\ &= 1-(1-1+1-1+\dots) \\ &= 1-S \\ 2S &= 1 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2}$$

, 「 」가
7) : 가 ?
:
: 6 가 ?
: 가

\therefore $7 \leq 6$
 \therefore $6 \leq 7$
가 $7 \leq 6$

\therefore $(6 \leq 7)$
가 ?

8) \therefore 가 ?

9) \therefore 가 ?

\therefore $8 \leq 8$ 가 ?

\therefore $8 \leq 9$ 가 ?

\therefore 가 ?

\therefore 가

$\{S_n\}$

가

,

:

가

:

가

.

:

가 ?

:

1

n

가

:

:

(

)

:

10)

:

가 ?

:

가

:

p

가 ?

:

: p
 :
 : p 가 ?
 :
 : p
 p
 :
 : () 가
 가 가
 :
 11) : 가 ?
 :
 :
 :
 :
 :
 12) : 가 ?
 :
 : 11

:

:()

: 가

13, 14) :

:

:

:

< D >

개념 검사지

본 검사는 여러분이 수열과 급수의 극한에 대하여 어느 정도 이해하고, 있는지를 알아보기 위한 것으로서, 검사의 결과는 공개되지 않으며, 단지 수학 교육 개선을 위한 연구의 목적에 사용할 뿐입니다. 문제를 잘 읽고 최선을 다하여 풀어주시기 바랍니다.

답은 직접 문제지에 적어 넣기 바랍니다. 감사합니다.

한국고원대학교 대학원 수학교육과

(양양여자) 고등학교 (2) 학년 (2) 반 이름 (방미선)

1. 수열 $\{x_n\}$ 과 $\{y_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$ 이 수렴한다고 해서 항상

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 또는 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 이 수렴하는가? 수렴하지 않으면 그 예를 들으시오.

예) $x_n = \frac{1}{100^n}, y_n = n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{100^n}$ 은 수렴, $\lim_{n \rightarrow \infty} n$ 은 수렴하지 않음

"항상 수렴하지 않음"

그러나 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{100^n} \cdot n$ 은 수렴함

2. 수열 $\{x_n\}$ 과 $\{y_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 이 수렴한다고 해서 항상

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 또는 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 이 수렴하는가? 수렴하지 않으면 그 예를 들으시오.

예) $x_n = n, y_n = -n, \lim_{n \rightarrow \infty} n$ 은 수렴하지 않음, $\lim_{n \rightarrow \infty} -n$ 은 수렴하지 않음

"항상 수렴하지 않음"

그러나 $\lim_{n \rightarrow \infty} n + (-n)$ 은 수렴함

③ 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 모두 발산하면 항상 $\{a_n b_n\}$ 이 발산하는가?

아니면 그 예를 들으시오.

"항상 발산함"

4. 수열 (a_n) 은 수렴하고, (b_n) 은 발산할 때,

1) $(a_n b_n)$ 은 항상 발산하는가? 아니면 그 예를 들으시오.

원래나 반발하지는 않는다

ex) $a_n = \frac{1}{n}$ $b_n = n$

$a_n \cdot b_n = \frac{1}{n} \cdot n = 1$ (3. 수렴)

2) $(a_n + b_n)$ 은 항상 발산하는가? 아니면 그 예를 들으시오.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $b_n = \sqrt{n}$

ex) n 은 1일 때 $a_n + b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}$

발산하지 않은 예도 있다. $= \frac{1 + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1+n}{\sqrt{n}}$

5. 수열 $1, -1, 1, -1, \dots$ 의 극한값을 구하시오.

$\frac{1+n}{n}$ 이므로 수렴

진동(발산) ∴ 극한값 X

6. 무한급수 $1-1+1-1+\dots$ 이 수렴하는가를 판정하시오.

- i) $1-x+x-x+\dots+x-x$
- ii) $(1-1)+1(1-1-1)+(-1+1)+\dots$
 $= 1-1+1-\dots$
- iii) $1-x+x-x+\dots$

수렴하지만 극한값은 다르다. \wedge 모두

7. $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

$a_n = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{n+1}$
 $= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1$

1, -1, 0

$$1+2+3+4+5+6+\dots+n$$

8. 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 의 극한값을 구하시오.

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

$$\frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

9. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 일때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 수렴하는가?

(수렴)

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$1+2+\dots+n$$

$$\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n(n+1)} \right)$$

$$d=1 \quad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$$

10. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 의 수렴여부를 판정하시오.

$$\frac{2}{\infty} = 0$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$$

반산

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

11. 다음 무한등비수열이 수렴하는 x 의 값의 범위를 구하시오.

$$\left(\frac{x}{2} \right)^n$$

$$-1 < x \leq 1$$

$$-1 < \frac{x}{2} \leq 1$$

$$-2 < x$$

$$x \leq 2$$

$$-2 < x \leq 2$$

12. 다음 무한등비급수가 수렴하도록 x 의 값의 범위를 정하십시오.

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \dots$$

$$|r| < 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$-1 < r < 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$-1 < 1-x < 1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$-1 < 1-x$$

$$1-x < 1$$

$$0 < x < 2$$

$$(x < 2)$$

$$0 < x$$

13. 수열에서의 극한값(또는 극한)의 정의를 쓰시오.

규칙적으로 숫자가 배열되어 있을 때 그 숫자들을 잘 보면
그 규칙을 알 수가 있다. 이 규칙을 a_n 이라 하면
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 극한값이라 한다.

(일정한 수에 가까워질 때의 수)

14. 무한급수에서의 극한값의 정의를 쓰시오.

규칙적으로 배열되어 있는 숫자를 계속 더해갈 때
가까운 값에 수렴한 때의 값.

$$\text{단 } -1 < r < 1$$