Ⅴ. 결과 및 논의

A. 결과

1. 연구문제(1) : 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 유형을 설정해서 분류할 수 있는가?

오류 분석은 세 개 고등학교에서 1학년학생들을 대상으로 시행한 문제지에 학생들이 풀어놓은 풀이 과정을 보고 오답을 쓰기까지의 원인을 분류하였다. 132명의 학생들중에서 어떤 문항에 대해 옳은 답을 제시했거나, 전혀 어떤 풀이 과정이나 답을 제시하지 않은 학생들은 제외 시켰다. 또 동일한 문제를 푸는 과정에서 연속해서 오류가 발생하는 경우에는 제일 처음으로 발생한 오류만을 분석하였고, 선행된 오류로부터 발생한 다음 단계의 오류는 포함시키지 않았다. 이렇게 하여 총 832개의 오류들을 찾아내어 분류할 수 있었다.

각 영역별로 각 학교별로 얼마나 많은 오류를 발생시켰는가를 알아보면 다음 <표 5-1>과 같다.

<표 5-1> 학교별 오류 빈도(%)

오류의 종류 / 학교	이해의 오류	전략선택의 오류	처리기술의 오류	반성의 미실행에 의한 오류	애매 모호한 오류
D고교	9.25%	14.90%	6.25%	2.40%	2.52%
Y고교	9.03%	14.18%	7.93%	2.88%	2.52%
S고교	5.65%	12.38%	5.78%	0.96%	3.37%
계	23.93%	41.46%	19.96%	6.24%	8.41%

<표 5-1>에서 보는 바와 같이 오류의 발생빈도를 보면 세 학교 모두에서 전략선택의 오류가 가장 많이 발생했다는 것을 알 수 있다. 이것은 학생들이 수학적 정리나 정의를 이해하는 일에 문제가 있다는 것을 나타내는 것이며, 또한 학생들이 문제풀이의 경험이 없다는 것을 드러내는 것이다. 따라서 앞으로의 수학과 수업에 있어서는 충분한 개념학습을 강조함과 아울러 이를 활용할 수 있는 지도에 중점을 두어야 하고, 학생들에게 스스로 문제를 풀어볼 수 있는 기회를 보다 많이 제공함으로써 문제풀이의 경험을 많이 가질 수 있도록 하여야 한다고 생각한다.

2. 연구문제(2) : 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 원인을 찾아볼 수 있는가?

앞에서 제시한 수학적 오류모델의 빈도 수를 따져보면 전략선택의 오류

(41.46%), 이해의 오류(23.93%), 처리기술의 오류(19.96%), 애매 모호한 오류(8.41%), 반성의 미 실행에 의한 오류(6.24%)의 순서로 나타나고 있다.

앞에서 분석한 오류모델과 그 빈도 수를 토대로 하여 오류의 원인에 대하여 다음과 같은 결론을 내릴 수 있겠다.

첫째, 학생들은 아마도 그들이 배운 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하거나 또는 알고 있으면서도 활용할 수 있는 능력이 부족하다.

둘째, 학생들은 전에 풀어본 문제와 연관짓기를 못하거나 문제를 다르게 진술하지 못하는 경우가 많다.

셋째, 문제에 포함된 핵심적 개념을 잃어버리거나 고려하지 못하는 경우가 많다.

넷째, 학생들은 주어진 문제를 풀기 위해 문제의 조건으로 주어진 자료를 무시하거나 혹은 잘못 사용하는 경우가 많다.

다섯째, 학생들은 문제에 주어진 조건을 여러 부분으로 분해함으로써 문제풀이에 필요한 정보를 찾아내어야 하는데 조건을 여러 부분으로 분해하지 못하는 경우가 많다.

여섯째, 학생들은 문제의 유형에 따라 답하는 경향이 다르다. 즉, 주어진 문제를 기호나 식, 그림, 문장제 등의 어떤 형태로 주어졌을 때, 이 문제를 풀기 위해 다른 형태로 번역하는 과정에서 많은 실수를 한다.

일곱째, 학생들이 너무나 잘 알고 있으리라 믿었던 계산상의 오류경향도 많았다.

여덟째, 학생들은 아무런 근거 없이 논리적으로 부적절한 확대 해석을 한다.

3. 연구문제(3) : 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 교정과정을 밝혀낼 수 있는가?

연구문제1에서 분류한 오류의 유형 중 세 가지 유형(이해의 오류, 전략선택

의 오류, 처리기술의 오류)에 대한 교정과정을 밝히기 위하여 D고교 학생 45명 중에서 대표적인 오류유형을 보여주고 있는 학생들 3명(이해의 오류-1명, 전략선택의 오류-1명, 처리기술의 오류-1명)을 선정하여 문헌연구에서 밝힌 혼합방법으로 오류의 교정과정을 살펴보기 위한 면담을 실시하였다. 그 결과 얻을 수 있었던 프로토콜(protocol)과 학생들의 변화된 모습(밑줄 그은 부분 참조)은 다음과 같다.

⊙ D고교 37번 학생의 언어약정(Verbal protocol)

문1) 다음 부등식을 만족하는 x 의 범위를 구하여라.

$2[x]^2 - 9[x] + 4 < 0$ (단, 정수 n 에 대하여 $n \leqq x < n+1$ 일 때, $[x] = n$)

교 : '검사설명서'를 읽었는가?

학 : 네.

교 : 문제를 읽고 풀이방법을 구상해보자. 부담 없이 네가 생각하고 있는 것을 얘기하면서 문제를 해결해 주기 바란다.

교 : 큰 소리로 문제를 읽어라.

학 : (문제를 읽는다)

교 : 문제를 이해하는가?

학 : 네.

교 : 어떤 방법으로 풀 수 있겠는가? 구하고자하는 것이 무엇이지?

학 : 부등식에서 x 의 범위를 구하는 것입니다.

교 : 그래! 그렇다면 주어진 조건은 무엇이지?

학 : 정수 n 에 대하여 $n \leqq x < n+1$ 일 때, $[x] = n$

교 : 주어진 조건이 무슨 뜻인지 알겠니? 그것을 다른 표현으로 바꿀 수 있겠니?

학 : ・・・(망설임). 가우스기호가 주어졌을 때 이 기호를 어떻게 처리해야

할지 모르겠어요. [이해의 오류]

교 : 조건이 무슨 뜻인지 이해가 안 된다는 말이네.

학 : 네!

교 : 문제를 풀기 위해서는 먼저 문제를 이해해야 하는데 문제를 이해하기 위해서는 문제의 조건이 무엇인가? 그 조건이 문제를 풀기에 충분한가? 등을 알아봐야 한다. 즉, 조건이 문제에서 구하고자하는 것을 나타내기에 충분한가? 하는 것을 살펴봐야 한다. 그렇다면 조건으로 주어진 가우스기호의 뜻을 알았다고 가정하고 주어진 문제를 어떻게 풀 것인가를 얘기해보아라.

학 : ···모르겠는데요.

교 : 조건의 뜻을 모르니까 풀이방법조차 생각을 못하는 것 같구나.

학 : 네

교 : 그렇다면, 조건에서 주어진 가우스기호의 뜻에 대해 먼저 알아보자.

학 : 네!

교 : 문제에 조건으로 주어진 것은 정수 n 에 대하여 $n \leqq x < n+1$ 일 때, $[x] = n$ 이라는 것인데, 여기에서 $[x]$ 라는 것이 무슨 뜻을 갖고있는가? 예를 들어보자. $[1.4]$ 는 얼마일까?

학 : (한참생각) ···

교 : $[1.4]$ 에서 1.4가 x 지? 그렇다면, x 자리에 1.4 를 대입해보면 $[1.4]$ 의 값을 구할 수 있겠지?

학 : 네.

교 : $n \leqq 1.4 < n+1$ 인 정수 n 의 값이 $[1.4]$ 의 값이 되겠지?

학 : 네.

교 ; 그러면 어떻게 될까?

학 : (한참생각) 그러니까 정확한 n 을 구해야되나요?

교 : 그렇지

학 : 1밖에 안 떠오르는데요. [교정]

교 : 맞았어! 그런데 왜 그렇게 망설였니?

학 : 자신이 없어서요.

교 : 그러면 몇 개만 더해보자 [0.4]는?

학 : 0 이요.

교 : [- 1.4]는?

학 : - 1 이요.

교 : 맞는 것 같니? 잘 생각해보아라.

학 : 아! - 2 요

교 : 가우스기호는 지금처럼 계산하면 되는 거야. 그러면 그 뜻을 한번 살펴보자. 가우스기호는 소수이하를 버린다는 의미가 있다. 이해되니?

학 : 네

고 : 그러면 다시 처음으로 돌아가서 문제에 조건으로 나온 정수 n 에 대하여 $n \leqq x < n+1$ 일 때, $[x] = n$ 이라는 말의 뜻을 이해할 수 있겠니?

학 : 네.

교 : 좋아! 문제의 조건은 이해가 되었으니까, 이제는 어떻게 문제를 해결할까 생각해보자.

학 : 음 ・・・(한참생각) 그러니까 $[x]$ 는 n 이니까 ・・・ [이해의 오류]

교 : 문제에서 구하라고 한 것이 무엇이니?

학 : x 의 범위요.

교 : 어떤 x 의 범위지?

학 : 부등식을 만족하는 x 의 범위요.

교 : 그렇다면, 제일 먼저 할 일이 무엇이지?

학 : 부등식을 풀어야하는데요.

교 : 그렇지! 그 부등식을 어떻게 풀지?

학 : $[x]$ 를 한 문자로 보고 인수분해 하면 될 것 같은데요. [교정]

교 : 그래! 문제를 계속 풀어보아라.

학 : $[x] = A$ 라고 놓으면, $2A^2 - 9A + 4 < 0$ 이고 인수분해 하면 ・・・ [문자가 A 라서 망설이고 있는 것 같음. A 를 x 로 바꾸어 제시하였더니 잘함].

$(2A - 1)(A - 4) < 0$ 이니까, $\frac{1}{2} < A < 4$ 여기에서 $[x] = A$ 이니까 $\frac{1}{2} < [x] < 4$ 조건을 생각하면 $n \leqq x < n + 1$ 일 때, $[x] = n$ 이라고 했으니까 n 은 $\frac{1}{2}$ 의 되야 하고 ・・・ [이해의 오류]

교 : 자! 다시 생각해보자. 여기에서 n 이 뭐지?

학 : n 은 정수요.

교 : $\frac{1}{2}$ 이 정수니?

학 : 유리수인데요.

교 : 그래, 그러면 $[x] = n$ 이니까 $[x]$ 는 뭐야?

학 : 정수요.

교: 그럼 지금 네가 구한 $[x]$ 의 범위가 어떻게 나왔니?

학 : 유리수에서 정수까지요.

교 : 그래, $\frac{1}{2}$ 보다 크고 4 보다 작은 정수가 $[x]$ 의 값이 되겠지?

학 : 네.

교 : 그러면 $[x]$ 의 값은 뭐지?

학 : 1,2,3 의 있는데요. $[x] = 1$ *or* 2 *or* 3 입니다. [교정]

교 : 그래, 그러면 이제 어떻게 하면 되지?

학 : $[x]$ 의 값이 나왔으니까, 조건에 맞는 x 의 값을 찾으면 되는데요. ・・・(한참생각) 어떻게 해야 되요? 잘 모르겠어요. [이해의 오류]

교 : 조건을 다시 생각해 보면 $[x] = n$ 일 때, $n \leqq x < n+1$ 이었으니까 $[x] = 1$이라고 하면 x 의 범위는 어떻게 되니?

학 : 아! 알았어요. ① $[x] = 1$ 일 때, $1 \leqq x < 2$, ② $[x] = 2$ 일 때, $2 \leqq x < 3$, ③ $[x] = 3$일 때, $3 \leqq x < 4$. 끝났는데요. [이해의 오류]

교 : 다시 점검해보자. 네가 지금 구한 것이 뭐지?

학 : $[x] = 1$ *or* 2 *or* 3 일 때 x 의 범위요.

고 : 그러면 그것이 문제의 답이 되니?

학 : ···

교 : 처음으로 돌아가 보아라. 문제에서 구하라고 한 것이 무엇이지?

학 : 부등식을 만족하는 x 의 범위요.

교 : 그래, 그런데 네가 지금까지 푼 과정을 보면 주어진 부등식을 만족하는 $[x]$ 의 범위를 $\frac{1}{2} < [x] < 4$ 라고 구했고, 여기에서 이것을 이용해서 x 의 범위를 $[x] = 1$, $[x] = 2$, $[x] = 3$ 일 때로 나누어서 구한 것이지?

학 : 네!

교 : 그렇다면 x 의 범위를 끝까지 구해야겠지?

학 : 네. 아! 무슨 말인지 알겠어요. 그러니까 ①, ②, ③을 통틀어서 최소의 수와 최대의 수, $1 \leqq x < 4$ 입니다. [교정]

교 : 결과가 옳은가? 매 단계를 점검해보아라. 자료와 조건의 활용은 적절하였는가? 주어진 조건에 맞는가?

학 : ··· (한참생각) 맞는 것 같은데요.

교 : 이와 유사한 문제가 나오면 풀 수 있겠니?

학 : (잠시 생각하다가) 네.

교 : 네가 문제를 처음 접했을 때 못 풀었던 이유가 뭐지?

학 : 조건이 무슨 뜻인지 몰라서요.

교 : 조건을 이해하지 못해서?

학 : 네.

교 : 조건을 이해하는 능력이 부족했다고 했는데, 왜 그럴까?

학 : 문자만 나오면 헷갈리는 것 같아요.

교 : 문자나 기호에 대해서 미리 겁을 낸다는 얘기인데, 이 문제에서 가우스 기호라는 새로운 정의가 주어졌을 때, 그 기호와 문자에 대해서 미리 겁을 내고 당황하게 되니까 그 뜻을 알아듣지 못하게 되는 거다. 사실 어떤 문제에 새로운 정의가 주어졌다면 그 정의대로 실행을 하기만 하면 연산을 할 수 있고 문제를 풀 수 있는데 새로운 것에 대한 당혹스러움 때문에 그 뜻을 파악할 정신이 없었던 거다. 따라서 앞으로는 이렇게 새로운 정의가 주어지는 문제에서는 당황하지 말고 차분히 그 정의의 뜻이 무엇인지를 생각하여야 한다. 그러니까 아까 문제를 풀기 전에 $[1.4], [0.4], [-1.4]$ 등의 값을 예를 들어 살펴보았듯이 그 정의가 나타내는 구체적인 예를 생각해보면 새로운 정의의 내용을 이해할 수 있게 되는 것이다. 이렇게 해서 주어진 조건을 이해하고, 이 조건으로 이 문제가 풀리겠는가? 즉, 조건은 문제를 해결하기에 충분한가? 하는 것을 살펴보면 문제를 성공적으로 해결할 수 있는 것이다.

학 : 잘 알겠습니다.

교 : 그러면 다른 문제를 하나 더 풀어보자.

학 : 네.

문2) x 에 대한 이차식 $x^2 + 2ax + (ka - 2k + b)$ 가 k 의 값에 관계없이 완전제곱식이 되도록 a, b 의 값을 구하여라.

교 : 문제를 큰소리로 읽어라.

학 : (문제를 읽는다)

교 : 어떤 방법으로 문제를 풀겠는가? 풀이를 구상하여 보아라. 아까 문제를 해결하려면 제일먼저 무엇을 한다고 했지?

학 : 문제를 파악해야 합니다.

교 : 문제를 파악한다는 것은 무슨 뜻이지?

학 : 문제에 주어진 조건이나 자료를 알아야 됩니다.

교 : 그렇다면 주어진 조건은 무엇인가?

학 : k 에 관계없이 완전제곱식이 된다는 것이요.

교 : 그 조건이 무슨 뜻을 갖고있지?

학 : 완전제곱이라는 것은 완벽하게 제곱으로 묶어진다는 거요. [이해의 오류]

교 : 조건이 완전제곱식이라는 것 하나뿐이니?

학 : 아니요.

교 : 문제를 이해하기 위해서는 주어진 조건을 다른 방법으로 고쳐볼 수도 있어야 하고, 조건을 여러 부분으로 분해해 볼 수도 있어야 한다. 이렇게 여려 부분으로 조건을 분해해 봄으로써 문제에서 의미하고 있는 뜻을 명확히 알 수 있는 기초가 되는 것이다. 그러면, 조건을 분해하여라.

학 : k 값에 관계없다와 완전제곱식이다라고 되는 데요.

교 : 그래. 그러면, k 값에 관계없다는 것이 무슨 뜻이지?

학 : k 는 무시해도 된다. 아니, k 가 어떤 것이어도 상관없다요.

교 : 그 말을 좀더 세련되게 수학적으로 표현하면?

학 : 아! 항등식이라는 것인데요.

교 : 그렇지! 아까 내가 문제에서 주어진 조건을 직접 사용하여 문제를 풀기 힘들다면, 그 조건을 다른 방법으로 표현해볼 수 있어야 한다고 했지?

학 : 네.

교 : 그러면 '완전제곱식이다'라는 말을 다르게 표현해보면 어떻게 될까?

학 : ···(한참생각) 그냥 이차방정식밖에 생각이 나지 않는데요. [이해의 오류]

교 : 그렇다면 이차방정식을 풀 때 어떤 방법으로 풀지?

학 : 인수분해요.

교 : 또는?

학 : • • •

교 : 근의 공식을 이용해도 되고, 완전제곱식으로 바꾸어서 풀 수도 있다. 이 세 가지가 이차방정식을 푸는 방법. 즉, 전략이다. 그러면, 문제에서 완전제곱식이 된다라고 했는데, 네가 방정식과 부등식 단원에서 배운 내용 중에 이 완전제곱식과 관계 있는 내용이 무엇이 있을까?

학 : • • •

교 : 판별식이지? 이차식이 완전제곱식이라는 것을 판별식과 연관지어 볼 수 있다. 그러면 이차식이 완전제곱식이 되기 위해서는 판별식이 어떻게 되어야 할까?

학 : • • •

교 : 판별식이 0 이어야 되겠지?

학 : 네. [교정]

교 : 지금 내가 얘기한 내용을 전에는 모르고 있었니?

학 : 아니요. 판별식도 알았고, 완전제곱식도 알았고. 그런데 이것들이 각각 별개의 것 인줄 알았는데요.

교 : 문제를 풀 때 그 문제에서 주어진 조건이 무엇인지를 한번에 파악할 수 없다면 그 조건을 다르게 표현해 봄으로서 그 문제를 이해하고 주어진 조건이 문제를 해결하기에 충분한지를 알아보아야 하는데, 여러 가지 서로 연관되어있는 수학적 내용들을 각각의 내용으로 단편적으로만 기억하고 있기 때문에, 기초적인 문제의 이해가 안되니까 문제를 못 푸는 것이다.

학 : 알겠습니다.

교 : 자! 그렇다면 문제를 이해했으니까 다시 문제를 풀어보아라.

학 : $D = b^2 - 4ac$ 에서

교 : 짝수판별식 알고있지? 그것을 사용해보아라.

학 : $D/4 = b'^2 - ac$ 이므로, $D/4 = a^2 - 1(ka - 2k + b) = 0$, $a^2 - ka + 2k - b = 0$,

$-ka+2k=-a^2+b$, $-k+2k=\frac{-a^2+b}{a}$ [처리기술의 오류]

교 : 이 단계를 점검해보자. 풀이가 옳은가? 문제에서 구하고자하는 것이 무엇이지?

학 : 아! $k(-a+2)=-a^2+b$ 에서 동류항의 계수가 같으니까, [교정]

$k(-a+2)=-a^2+b+0k$ 에서, $-a+2=0$ 그러니까 $a=2$ 입니다. 또 $-a^2+b=0$ 에서 a 에 2 를 대입하면 $4+b=0$, $b=-4$ [처리기술의 오류]

교 : 단계를 점검해 보아라. 풀이가 옳다고 확신하는가?

학 : 아! $-4+b=0$, $b=4$ 입니다. [교정]

교 : 풀이가 옳다고 확신하는가?

학 : 네.

교 : 문제를 풀 때, 문제에서 주어진 조건과 자료를 잘 파악해야하고, 이것들이 의미하는 내용의 무엇인지를 알아야 하는데 그렇게 하려면 이 조건과 자료를 다른 표현으로 바꾸어 볼 수 있어야 한다. 이 때, 서로 관련 있는 수학적 내용을 연관지어 총체적으로 생각하지 못하고 따로 떨어져 있는 별개의 내용으로 이해하고 있기 때문에 문제를 잘 풀어낼 수 없게된다. 따라서 앞으로 수학을 공부할 때는 서로 관련 있는 내용을 총체적으로 파악할 수 있도록 노력해야 한다.

학 : 네, 잘 알았습니다.

교 : 그러면 다음에 이와 유사한 문제가 나오면 풀 수 있겠니?

학 : 네!

교 : 수고했다.

⊙ D고교 37번 학생의 변화된 모습

이 학생은 처음 오류검사를 실시했을 때 주로 문제의 이해단계에서 오류를 보이던 학생이었는데, 두 개의 문항을 제시하면서 다시 면담을 실시한 결과 여

전히 문제의 이해단계에서 오류를 범하여 문제를 해결하지 못하고 있었다. 첫 번째, 문제1)에서는 가우스기호의 뜻을 제대로 파악하지 못하여 문제풀이에 실패하였는데, 이처럼 새로운 정의가 주어지는 문제에서 많은 학생들이 어려움을 겪는 것 같다. 이 때 교사는 학생들에게 새로운 정의에 대한 구체적인 예를 찾아보게 시킴으로써 학생들의 이해를 도모할 수 있다. 따라서 연구자는 연구대상자에게 문제의 이해에 필요한 가우스기호의 정의를 실제 구체적인 예를 찾아보게 시킴으로써 이해시킬 수 있었고, 이렇게 하여 어느 정도 문제풀이가 가능하게 되었으나, 가우스기호에 대한 이해부족으로 문제를 푸는 도중에 실제로 $[x]$ 를 처리하여 x 의 범위를 구하지 못함으로써 문제풀이에 어려움을 겪기도 하였다. 그러나 가우스기호에 대한 이해를 바탕으로 결국 성공적으로 문제를 해결할 수 있다는 것을 확인할 수 있었다.

두 번째, 문제2)에서는 이차식, 이차방정식과 이차 부등식, 이차함수 등이 실제로 밀접하게 연관되어 있음에도 불구하고 이들의 내용을 서로 별개의 것으로만 기억하여 서로 관련이 있는 수학적 내용들을 총체적으로 연결지어 생각하지 못함으로써 문제풀이에 어려움을 겪고 있었다. 문제에 주어진 완전제곱식이라는 조건의 내용을 다른 표현 즉, '판별식이 0 이다' 라는 내용으로 고쳐서 생각하지 못함으로써 문제풀이에 어려움을 겪었다. 또한 문제를 이해하기 위해서는 주어진 조건을 여러 부분으로 분해해 봄으로써 그 조건들의 의미를 정확히 파악하여야 하는데 이 경우 연구대상자는 k 의 값에 관계없이 완전제곱식이 된다는 조건을 k 의 값에 관계없이 성립한다라는 것과 완전제곱식이 된다라는 것으로 조건을 분해하지 못함으로써 문제풀이에 어려움을 겪고 있었다. 따라서 연구자는 연구대상자에게 조건을 여러 부분으로 분해해 볼 것과 그 조건들을 다른 방법으로 표현해 볼 것을 요구함으로써 연구대상자의 문제풀이에 도움을 주고자 하였다. 그 결과 도중에 처리기술의 오류를 범하기는 했으나 문제를 성공적으로 해결할 수 있었다.

최근에 들어와서 문제 해결 교육을 개선하고 수학적 사고 능력을 발전시키기

위해서는 주어진 문제를 수동적·완결적으로 다룰 것이 아니라, 능동적·발전적으로 취급해야 한다는 주장과 함께 '문제 제기(problem posing)'의 필요성이 대두되고 있다. 우리가 어떤 것을 '알게 된다는 것'은 단지 빈 공간에 '채워 지는 것'과는 근본적으로 다르다고 하겠다. Brown과 Walter(1990)는 어떤 것을 알게 되는 것은 '단지 구경하는 스포츠'가 아니라 '참여하는 스포츠'임을 밝히고 있다. 즉, 그것은 우리가 이해하려고 하는 것에 작용하여 영향을 줄뿐만 아니라 심지어 그것을 수정하기까지 하려는 적극적인 자세가 요구된다는 것이다. 이런 태도의 육성이 바로 문제 제기의 중심적인 목표이다.

Brown과 Walter(1990)에 의하면 문제 제기는 두 가지 방식으로 문제 해결 활동과 깊은 관련을 맺고 있다. 첫째, 문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제를 제기함으로써 원래의 문제를 재해석하게 되고 문제를 해결할 수 있는 단서가 생기게 된다는 데 있다. "이 문제는 실제로 무엇을 뜻하고 있는가?" 또는 "이 문제의 분명한 요소처럼 보이는 것에서 그렇지 않은 부분으로 초점을 옮기면 어떻게 되는가?"와 같은 질문은 원래의 문제를 해결하려는 노력 속에 새로운 문제를 생성시키게 하는 것이다. 둘째, 원래의 문제와는 다른 새로운 문제를 만들고 그것을 분석해보지 않으면, 문제를 해결해 놓고서도 의미를 충분히 이해하지 못할 때가 있다는 것이다.

문제해결자가 문제 제기에서 얻을 수 있는 이익에는 관련된 내용을 과거와는 전혀 다른 새로운 관점에서 볼 수 있다는 것뿐 아니라 그 내용으로부터 새로운 아이디어를 생각할 수 있다는 데에 있다. 그 뿐만 아니라 문제 제기는 수학에 대한 불안감을 해소하는 역할을 하기도 한다. 왜냐하면 교사가 제시한 문제에 대한 해답을 찾는 것만으로 이루어진 수업에서는 오답에 대한 불안감이 있을 수 있지만, 학생 스스로 문제를 제기하는 수업에서는 자유롭게 의견을 제안할 수 있으므로 수학이 보다 친근한 과목이 되게 할 수 있으며, 학생에게 수학에 대한 자신감을 심어 줄 수 있는 것이다. 또한 문제 제기는 학생들 간에 경쟁심보다 공동 학습을 촉진시키는 역할을 할 수 있다.

그러나 현재의 일선 수업현장에서는 문제 해결에만 관심을 보일 뿐 문제 제기에 대해서는 거의 관심을 갖고 있지 않다. 교사와 학생은 단지 산이 거기에 있으니까 올라간다고 하는 것처럼, 그저 문제가 있으니까 해결한다는 입장을 취하고 있다. 그들은 주어진 문제가 어디에서 나왔는지 알아보려고 하지 않는 것은 물론 문제가 어떻게 다르게 형식화될 수 있는지를 알려고 하지 않는 것이 보통이다.

따라서 학생들의 오류(특히 이해의 오류)를 줄이기 위한 방법으로 문제 제기를 제안하고자 한다. 즉 문제를 해결하기 위한 수단으로 문제 제기를 제안하고자 하는 것이다. 학생들은 주어진 문제를 접했을 때 문제 제기를 함으로써 관련된 내용으로부터 과거와는 전혀 다른 새로운 관점을 얻을 수 있으며, 그 내용으로부터 새로운 아이디어를 생각할 수 있게되고, 수학에 보다 친근함을 느끼게 되며, 수학에 대한 자신감을 가질 수 있게되어 이러한 경험을 바탕으로 하여 다른 문제가 주어졌을 때 그 문제에 대한 이해를 높일 수 있고 나아가 이해의 오류를 줄일 수 있으리라고 생각한다.

⊙ D고교 15번 학생의 언어약정(Verbal protocol)

문제4) 세 변의 길이가 2, 3, x 인 삼각형이 있다. 이 삼각형이 예각삼각형이 되도록 x 의 값의 범위를 구하여라.

교 : '검사설명서'를 읽었는가?

학 : 네.

교 : 문제를 읽고 풀이방법을 구상해보자. 부담 없이 네가 생각하고 있는 것을 얘기하면서 문제를 해결해 주기 바란다.

교 : 큰 소리로 문제를 읽어라.

학 : (문제를 읽는다)

교 : 문제를 이해하는가?

학 : 네.

교 : 어떤 방법으로 풀 수 있겠는가? 제일 먼저 해야할 일이 무엇일까?

학 : 삼각형에서 x 가 가장 큰 변일 때하고, 3 이 가장 큰 변일 때를 나누어서 풀어보도록 하겠습니다.

만일 x 가 가장 큰 변일 때 삼각형의 조건에서 $x < 2 + 3$ 이므로 $x < 5$ 이고, 피타고라스 정리에 의하면 $x^2 > 2^2 + 3^2$ [전략선택의 오류]에서 $x^2 > 25$ 이고, $x^2 > \sqrt{5}$ [처리기술의 오류]

교 : 이 단계를 점검해 보자. 자료로부터 무언가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까? 풀이가 옳은가?

학 : (생각하다가) 아! $x^2 > 13$ 이므로 $-\sqrt{13} < x < \sqrt{13}$ [처리기술의 오류]

교 : 풀이가 옳은가?

학 : 아! x 의 범위. $-\sqrt{13} > x$ *or* $x > \sqrt{13}$. 하지만 x 는 음수일 수 없으므로 $x > \sqrt{13}$. 따라서 $\sqrt{13} < x < 5$. [교정]

이제 3 이 제일 클 경우인데 삼각형의 조건에서 $2 + x > 3$ 이므로 $x > 1$, 그리고 피타고라스정리에 의해 $3^2 > 2^2 + x^2$, $9 > 4 + x^2$ 이므로 $x^2 < 5$. 따라서 $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. 하지만 x 는 0 보다 커야하므로 $0 < x < \sqrt{5}$ 이다. 따라서 $1 < x < \sqrt{5}$ 그러므로 $1 < x < \sqrt{5}$ *or* $\sqrt{13} < x < 5$ 이다.

교 : 자! 이 단계를 점검해 보자. 풀이가 맞는 것 같니?

학 : (한참 생각하다가) 또 하나의 조건이 있을 것 같은데・・・

교 : 무슨 조건?

학 : ・・・ 맞는 것 같은데요.

교 : 정리나 정의로 되돌아가 보자. 피타고라스정리가 뭐지?

학 : 삼각형의 세 변이 있는데요 빗변의 제곱과 나머지 다른 변의 제곱의 합이 같으면 직각삼각형이고요. 빗변의 제곱이 나머지 다른 변의 제곱의 합보다 크면 예각이고요. 아니 잠깐만. 맞는 거 같은데・・・ [전략선택의 오류] 아! 둔각인가? 아! ・・・

교 : 둔각삼각형이지?

학 : 네, 둔각삼각형이고요. [교정]

교 : 우리의 문제를 보면 예각삼각형이 되도록 한다고 했는데 너는 지금 둔각삼각형인 경우로 문제를 풀었으니까 문제가 제대로 풀리지 않은 것이지. 다른 과정은 다 좋았는데 말이야.

학 : 네.

교 : 그러면 문제를 다시 해결해보자. 차분하게 덜렁대지 말고.

학 : 시간이 오래 걸려도 되요?

교 : 괜찮아!

학 : 첫 번째 x 가 제일 클 경우.

① 삼각형의 조건에서 적어도 가장 긴 변 x 는 $x < 2 + 3$ 이므로 $x < 5$ 이다.

② 동시에 예각삼각형이라는 것은 피타고라스정리에 의하면, $x^2 < 2^2 + 3^2$ 이고 $x^2 < 13$ 이므로 $-\sqrt{13} < x < 13$ 이다. [처리기술의 오류]

교 : 이 단계를 점검해 보자. 무엇을 하고 있는가?

학 : 아! (웃음) $-\sqrt{13} < x < \sqrt{13}$ 입니다. [교정] x 는 변의 길이이므로 0 보다 크니까 $0 < x < \sqrt{13}$ 따라서 $x < \sqrt{5}$ 이고 $0 < x < \sqrt{13}$ 이어야 하니까 $0 < x < \sqrt{13}$

두 번째 3 이 제일 클 경우

① 삼각형의 조건에서 $3 < 2 + x$ 이므로 $x > 1$ 이다.

② 피타고라스 정리에서 $3^2 < 2^2 + x^2$ 이므로 $x^2 > 5$ 따라서 $x < -\sqrt{5}$ *or* $x > \sqrt{5}$, $x > 0$ 이므로 · · · 어! 이상하다. 아! 되는구나! $0 < x < \sqrt{5}$ 따라서 $1 < x < \sqrt{5}$ [처리기술의 오류]

교 : 이 단계를 점검해보자. 맞는다고 확신하는가?

학 : 아! $x < -\sqrt{5}$ *or* $x > \sqrt{5}$, $x > 0$ 이므로 $x > \sqrt{5}$ [교정] 여기에서

$x > 1$이고 동시에 $x > \sqrt{5}$ 이므로 x 는 단순히 $x > \sqrt{5}$ 이다. 따라서 $0 < x < \sqrt{13}$ 이고 동시에 $x > \sqrt{5}$ 이므로 $\sqrt{5} < x < \sqrt{13}$ 이다.

교 : 결과가 옳은가?

학 : (한참 생각하며 검토해봄)

교 : 조건을 모두 활용했는가? 등을 점검해보면서 검토해야겠지?

학 : 네.

교 : 맞는 것 같니?

학 : 풀이과정에는 문제가 없는 것 같고요, 단지 산수계산에서 자신이 없는데요. 맞는 것 같습니다.

교 : 이 문제를 다른 방법으로 풀 수 있을까?

학 : (한참 생각하다가) 모르겠는데요.

교 : x 가 제일 클 때와 3 이 제일 클 때 두 가지 경우로 나누어 문제를 해결했는데, 이렇게 두 가지경우로 나누지 말고 $2,3,x$ 를 삼각형의 세 변이라고 놓고 문제를 풀 수도 있지 않을까?

학 : ・・・ (한참 생각)

교 : 조건을 달리 표현해 보자. $2,3,x$ 가 삼각형의 변이 되려면 모두 양수이어야지?

학 : 네.

교 : 이제 정의나 정리로 돌아가 보자. 삼각형이 되기 위한 조건이 뭐지?

학 : ・・・ [전략선택의 오류]

교 : 어떤 두 변의 합도 나머지 한 변보다 크면 삼각형이 되겠지?

학 : 아! 네. [교정]

교: 그러니까 이 조건들을 생각해서 문제를 해결할 수 있지 않겠니? 제일먼저 해야할 일이 무엇이지? 자료로부터 무언가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까? 미지인 것을 결정하는데 적절한 다른 자료를 생각해 볼 수 있을까?

학 : 네, 그렇다면, $2+3>x$ 에서 $5<x$ 이고 [처리기술의 오류] $3+x>2$ 에서 $x>-1$ 인데 $x>0$ 이므로 안되고, 또 $2+x>3$ 에서 $x>1$ ・・・

교 : 이 단계를 점검해 보자. 옳다고 생각하는가?

학 : 아! $2+3>x$ 에서 $x<5$ 그러니까 $1<x<5$ 이다. [교정] 하지만 아까 푼 것하고 틀린데요?

교 : 이 단계를 점검해 보자. 여기까지는 무엇을 구한 것이지?

학 : ・・・ [전략선택의 오류]

교 : 처음으로 돌아가 보아라. 구하고자 하는 것이 무엇이지?

학 : 예각삼각형이기 위한 x 의 범위요. [교정]

교 : 그렇다면, 예각삼각형이기 위한 조건이 무엇이지?

학 : 어느 한 변의 제곱이 나머지 두 변의 제곱의 합보다 작은 거요.

교 : 그러면 이 조건을 변형하여 식으로 만들어보아라.

학 : $x^2<2^2+3^2$ 에서 $x^2<13$ 이고 $-\sqrt{13}<x<\sqrt{13}$, $x>0$ 이므로 $0<x<\sqrt{13}$. $2^2<x^2+3^2$ 에서 $4<x^2+9$ 이고 $-5<x^2$ 이므로 $x>0$ 에 부적합하다. $3^2<2^2+x^2$ 에서 $9<x^2+4$ 이고 $5<x^2$ 이므로 $x<-\sqrt{5}$ or $x>\sqrt{5}$.

여기에서 구한 세 가지 범위가 공통으로 되는 것은 $\sqrt{5}<x<\sqrt{13}$

교 : 답이 맞는지 명확히 알 수 있는가?

학 : (한참 생각하다가) 맞는 것 같은데요.

교 : 그래, 네가 문제를 해결한 방법에 대해 점검을 해보자. 처음에 예각삼각형과 둔각삼각형을 착각해서 전략을 잘못 생각하여 문제를 잘못 풀었는데 전략을 제대로 세우기만 하면 풀이를 적절하게 할 수는 있다. 물론 중간에 처리과정에서 오류가 발생하기는 했지만, 따라서 전략의 선택을 위한 자료와 조건을 사용하는 연습, 전에 풀어본 유사문제와의 연관관계를 생각해내기, 풀이에 사용되는 정리나 정의에 대한 공부를 좀 더 열심히 해야할 것 같다. 또한 풀이

중간에 문제에 포함된 핵심적 개념을 잊어버렸는데 이런 것은 주의를 요하는 일이다.

학 : 네.

교 : 그러면 다른 문제를 하나 더 해결해 보자.

문5) $(a-1)x^2-2(a-1)x$ 가 x 의 모든 실수 값에 대하여 -1 보다 클 때, 실수 a 의 범위를 구하여라.

교 : 문제를 읽고 풀이를 구상해 보자.

학 : (문제를 읽는다)

교 : 어떻게 풀 것인가? 제일 먼저 해야할 일이 무엇이지?

학 : $a-1$ 을 치환해서 풀거나, 아니면 $(a-1)x^2-2(a-1)x$ 가 x 의 모든 실수값에 대해 -1 보다 크다고 했으니까 $a-1>0$ [전략선택의 오류] 이고 판별식 D 가 0 보다 작은 경우로 풀겠습니다.

교 : 여기서 구하고자하는 것이 뭐니?

학 : 실수 a 의 범위요.

교 : 중요한 자료와 조건은? 조건은 구하고자하는 것을 결정하기에 충분한가? 또는 부족한가? 또는 과다한가?

학 : 부족한 것 같은데요.

교 : 부족한 것 같으면 문제를 다르게 표현해봐야겠지?

학 : 네.

교 : 비슷한 문제를 풀어본 경험을 떠올려보고, 주어진 조건을 어떻게 다르게 표현할 수 있을까? 하는 것을 생각해보자.

학 : 네. $(a-1)x^2-2(a-1)x$ 가 -1 보다 크니까요. $(a-1)x^2-2(a-1)x>-1$ 에서 $(a-1)x^2-2(a-1)x-1>0$ 이 됩니다. 여기서 $a-1$ 을 A 로 치환하면 $Ax^2-2Ax-1>0$ 이 되고, 그러면 판별식을 써

야 하니까, $(-2A)^2 - 4A > 0$ 또는 $(-A)^2 - A > 0$ [전략선택의 오류]

교 : 이 단계를 점검해보아라. 맞는 것 같니?

학 : 네, 된 것 같은데요.

교 : 다시 생각해보아라. 문제를 좀더 다르게 진술할 수 있을까?

학 : $(a-1)x^2 - 2(a-1)x - 1 > 0$ 인 실수 a 의 범위를 구하면 되는데요.

교 : 여기서 어떻게 하면 될까?

학 : 아! $a-1>0$, $a>1$ 이다.

교 : 그 다음에는?

학 : 판별식이 $D>0$ 일 때 요. [전략선택의 오류]

교 : $D>0$ 이면 방정식의 근이 어떤 근이 나오지?

학 : 한 근, 아니 요. 0 보다 크면 ・・・ 모든 실수요. [전략선택의 오류]

교 : 방정식의 근이 어떻게 되냐고 이차방정식이라고 생각하고 $D>0$ 이면 이 이차방정식의 근이 어떤 근이 나오지?

학 : 실근이요.

교 : 실근은 서로 다른 두 실근이 나온다는 얘기지?

학 : 네.

교 : 그러면 함수의 그래프와 연관지어 생각하면 함수의 그래프가 x 축과 어떻게 되지?

학 : 만나거나 위로 올라간다. [전략선택의 오류]

교 : 다시 한번 생각해 보아라.

학 : 두 점에서 만나는데요. [교정]

교 : 우리의 문제로 다시 돌아가자. 이차식이 0 보다 클 때 실수 a 의 값을 구하는 것이지? 이 이차식을 이차함수로 바꾸어 생각하면 그 이차함수의 그래프는 어떻게 그려지지?

학 : x 축 위에 요.(x 축과 두 점에서 만나는 그래프를 그려놓고 x 축 위를

표시함) [전략선택의 오류]

교 : 아니지, 함수전체의 그래프 말이야.

학 : 0 보다 크다면 요? x 축하고 만나지 않아요.

교 : 그래! x 축하고 만나지 않으면, 판별식이 어떻게 되지?

학 : $D > 0$ 이어야 되는데요. [전략선택의 오류]

교 : 자! 다시 생각해보아라. 문제풀이에 필요한 정의 및 정리는 무엇인가?

학 : 아! $D < 0$ 인 데요. [교정]

교 : 왜 혼동을 일으켰지?

학 : 이해를 잘 못했거나, 부분적으로 이해를 해서 혼동하는 것 같습니다.

교 : 부분적으로? 부분적으로 이해했다는 것이 무슨 뜻이니?

학 : $b^2 - 4ac > 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는데, 무조건 이차식이 0 보다 크면 판별식도 0 보다 크다는 생각이 그냥 듭니다.

교 : 네가 생각을 안하고 너무 쉽게 해결하려고 하는 것 같다.

학 : 네.

교 : 그러면, 계속 문제를 해결해 보자.

학 : $a - 1 > 0$ 이니까 $a > 1$ 이고 $D/4 = \{-(a-1)\}^2 - (a-1) < 0$, $(a-1)^2 - (a-1) < 0$, $a^2 - 2a + 1 - a + 1 < 0$, $a^2 - 3a + 2 < 0$, $(a-1)(a-2) < 0$, 그러므로 $1 < a < 2$ 이고 $a > 1$ 이니까 $1 < a < 2$ 입니다.

교 : 결과를 점검해보아라. 풀이가 옳다고 확신하는가?

학 : (한참 생각하다가) 맞는 것 같은데요・・・

교 : 문제를 다시 보자. 문제에 포함된 핵심적인 개념은 모두 고려했는가?

학 : (문제를 읽는다)

교 : 우리가 선택한 전략이 무엇이지?

학 : 판별식이요.

교 : 판별식은 어디에서 사용하는 것이지?

학 : 이차방정식이요.

교 : 문제에 주어진 식이 이차식이라는 보장이 있는가?

학 : 아니요.

교 : 이차식이라는 조건이 없는데, 그냥 이차식이라고 생각하고 문제를 풀었지?

학 : 네

교 : 그럼 어떻게 해야 할 까?

학 : $a \neq 1$이라고 하면 되는데요. [전략선택의 오류]

교 : $a = 1$ 일 수는 없나?

학 : 아니요. ・・・ 아! $a = 1$ 이면 $0 > -1$ 이니까 되는구나! [교정] 그러면 $a = 1$ 일 때, $a > 1$ 일 때를 가지고 풀어야 합니다.

교 : 그렇다면 계속 풀어보자.

학 : $a = 1$ 일 때 성립하니까, 전체 답은 $1 \leq a < 2$ 입니다.

교 : 이차항의 계수가 문자이면 주어진 식이 이차식이 아닐 수도 있으므로 이런 경우도 생각해서 문제를 해결해야 하는데, 자꾸 점검해보라고 해도 틀린 부분을 찾아내지 못하는 것은 고정관념 때문인 것 같다. 한가지에 집착하여 다른 것을 보지 못하는 어리석음을 범하지 말자. 그러므로 검토할 때에는 주어진 조건에서 빠트린 것이 없는지, 주어진 조건을 모두 이용했는지 등을 잘 생각해야 하고, 만일 제기된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 생각하여 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 있는가? 보다 일반적인 문제는? 보다 특수한 문제는? 유사한 문제는? 문제를 부분적으로 풀 수 있는가? 등을 생각해보아야 하고, 조건 가운데 일부분만 남기고 다른 것은 버렸을 때 미지인 것은 어느 정도까지 정해지는가? 자료로부터 무언가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까? 미지인 것을 결정하는 데 적절한 다른 자료를 생각해 볼 수 있을까? 새로운 미지인 것과 새로운 자료가 서로 보다 더 가깝게 되도록 하기 위해서 미지인 것이나 자료 또는 필요하다면 두 가지 다 변형할 수 있을

까? 변형하고 일반화하면 어떻게 될까? 하는 것을 생각해보아야 한다. 또, 자료는 모두 사용했는가? 조건을 모두 사용했는가? 문제에 포함된 핵심적인 개념은 모두 고려했는가? 어떤 방법으로 풀겠는가? 계획이 옳은가? 등에 관해서도 생각하여 문제를 전체적으로 어떻게 해결 할 것인가 하는 계획을 잘 수립해야하는 것이다.

학 : 네. 잘 알겠습니다.

교 : 다음에 이와 유사한 문제가 나오면 해결할 수 있겠니? 지금 우리가 여기에서 풀어본 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있겠니?

학 : 네.

교: 수고했다.

⊙ D고교 15번 학생의 변화된 모습

이 학생을 처음에 오류검사를 실시했을 때, 주로 전략선택에서 오류를 보이던 학생이었는데, 두 개의 문항을 제시하면서 다시 면담을 실시한 결과 역시 전략선택에서 오류를 범하여 문제를 해결하지 못하고 있었다.

첫 번째, 문제4)에서 두 가지 전략으로 문제를 풀어보게 하였다. 하나는 연구대상자가 스스로 생각한 전략대로 풀게 하였고, 또 하나는 연구자가 제시한 전략으로 문제를 풀어보게 하였다. 이 두 가지 전략에서 모두 삼각형의 조건에서 둔각삼각형이 되기 위한 조건과 예각삼각형이 되기 위한 조건을 혼동하여 문제를 틀리게 풀이하였는데, 예각삼각형이 되기 위한 조건을 알려주자 중간에 처리기술의 오류를 범하기는 했으나 무리 없이 문제를 해결할 수 있게되었다.

두 번째, 문제5)에서는 $(a-1)x^2-2(a-1)x-1>0$에서 좌변이 우변보다 클 경우 아무런 의심 없이 무조건 판별식에서 $D>0$ 라고 생각하는 오류를 범하고 있었으며, 또한 이차항의 계수가 문자일 경우 그 문자의 값에 따라 이차식이 되지 않을 수 있음에도 불구하고 이를 무시하고 x^2 이 눈에 보인다는 것만으로 무조건 이차식이라고 생각하는 오류를 범하고 있었다. 그래서 오류가 발

생할 때마다 중간 중간에 관련된 문제로 전에 풀어 본 일이 있는 문제가 있다면 그것을 활용할 수 있을까? 그 결과를 활용할 수 있을까? 그 방법을 활용할 수 있을까? 문제를 좀더 다르게 진술할 수 있을까? 문제에 주어진 핵심적인 개념은 모두 고려했는가? 하는 등의 질문을 함으로써 연구대상자의 주의를 환기시킨 결과 성공적으로 문제를 해결할 수 있었다. 또한 연구대상자에게 문제풀이가 모두 끝난 후, 우선 관련이 있는 문제나 유사한 문제를 접해본 일이 있는가? 유용하게 쓰일 듯한 어떤 정리를 알고 있는가? 다른 관점이나 표현은? 문제를 좀더 다르게 진술할 수 있을까? 정의로 되돌아가 보아라. 제일 먼저 해야할 일은 무엇인가? 만일 제기된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 생각하여 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 있는가? 보다 일반적인 문제는? 보다 특수한 문제는? 유사한 문제는? 문제를 부분적으로 풀 수 있는가? 등을 생각해보아야 하고, 조건 가운데 일부분만 남기고 다른 것은 버렸을 때 미지인 것은 어느 정도까지 정해지는가? 자료로부터 무언가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까? 미지인 것을 결정하는 데 적절한 다른 자료를 생각해 볼 수 있을까? 새로운 미지인 것과 새로운 자료가 서로 보다 더 가깝게 되도록 하기 위해서 미지인 것이나 자료 또는 필요하다면 두 가지 다 변형할 수 있을까? 변형하고 일반화하면 어떻게 될까? 하는 것을 생각해보아야 한다. 또, 자료는 모두 사용했는가? 조건을 모두 사용했는가? 문제에 포함된 핵심적인 개념은 모두 고려했는가? 어떤 방법으로 풀겠는가? 계획이 옳은가? 등에 관해서도 생각하여 문제를 전체적으로 어떻게 해결 할 것인가 하는 계획을 잘 수립해야한다는 얘기를 해줌으로서 전략선택에서 유의해야할 내용을 알려주었다. 따라서 앞으로는 오류의 발생회수를 줄일 수 있으리라고 생각하며, 성공적인 문제해결자가 될 것이라고 기대한다.

Poly의 문제해결 과정 4단계에서 반성의 단계는 학생들이 문제해결을 통해 학습할 수 있는 결정적인 기회를 제공하는 가장 중요한 활동이라고 생각한다. 그러나, Kantowski(1977)는 교사가 반성하기를 강조하면서 지도하였음에도 불

구하고 풀이를 반성하는 습관이 형성되었다는 증거는 거의 찾아 볼 수 없었다고 보고하고 있다. 즉 학생들은 반성하는 습관을 획득하기를 어려워한다는 것이다. 일선학교에서 학생들로 하여금 반성하는 습관을 기르도록 지도하는 것은 쉬운 일이 아니다. 풀이 과정을 평가할 수 있는 시험이 없는 데다 정해진 수업 내용(교육과정)을 지도해야 한다는 의무감이 앞서고 학생들이 예상과 달리 사고의 혼란을 일으키기도 하기 때문이다. 그럼에도 불구하고 반성하는 습관은 매우 중요하다.

많은 문제가 이전의 풀이로부터 유추에 의해 해결되는 경우가 많다. 훌륭한 문제해결자는 문제해결 결과와 그 구체적인 풀이 방법을 매우 중요하게 다루어야 한다. 이렇게 함으로써 다른 문제를 해결할 때 전에 풀어본 문제로 관련된 문제에 무엇이 있는지를 생각하여 그것을 활용할 수 있는지, 그 결과를 활용할 수 있는지, 그 방법을 활용할 수 있는지, 어떤 보조요소를 도입하면 그것을 활용할 수 있는지를 생각해 낸다면 새롭게 주어진 문제의 해결에 많은 도움이 될 것이다. 그러나 현재 일선 학교 수업 현장에서는 결과를 얻어내어 답을 맞추는 것에만 치중한 나머지 문제해결을 통해 학습을 증진시킬 수 있는 방법에 대해서는 무관심하다.

문제해결 능력의 발달은 자기가 푸는 문제에 주의를 집중하고 반성하는 데에 의존하며, 일반적인 문제를 설정하여 그것을 풀어보는 것은 문제해결 능력의 개발에 도움이 된다고 생각한다.

따라서 현실적으로 여러 가지 어려운 상황에도 불구하고 학생들의 오류(특히 전략선택의 오류)를 줄이기 위한 방법으로 어떤 문제를 해결할 때 반성의 단계를 활용하여 문제상황을 개발하고 탐구하도록 하며, 문제를 확장하여 일반화하도록 하며, 해를 일반화하도록 하며, 문제 풀이 과정을 일반화하도록 하며, 자기 반성 태도를 개발하도록 할 것을 제안하고 싶다.

⊙ D고교 24번 학생의 언어약정(Verbal protocol)

문제2) x 에 대한 이차식 $x^2 + 2ax + (ka - 2k + b)$ 가 k 의 값에 관계없이 완전제곱식이 되도록 a, b 의 값을 구하여라.

교 : '검사설명서'를 읽었는가?

학 : 네.

교 : 문제를 읽고 풀이방법을 구상해보자. 부담 없이 네가 생각하고 있는 것을 얘기하면서 문제를 해결해 주기 바란다.

교 : 큰소리로 문제를 읽어라.

학 : (문제를 읽는다)

교 : 풀 수 있겠니? 어떤 방법으로 문제를 해결할 것인가?

학 : 완전제곱식을 만들면 될 것 같은데요.

교 : 그러면 한번 만들어 보자.

학 : 완전제곱식이 되려면요. (한참 생각하다가) 아! $2ax$의 반의 제곱을 해서 제곱을 만든 다음에 k 에 관계없이 $(x + a)^2 - a^2 + ka - 2k + b =$ 가 완전제곱식이니까. k 에 관계없이 완전제곱식이 되도록 하기 위해서는 · · · [전략선택의 오류]

교 : 자! 이 단계를 점검해 보자. $(x + a)^2 - a^2 + ka - 2k + b$ 가 완전제곱식이 되려면 어떻게 하면 될까?

학 : (한참 생각하다가) 뒤에 있는 $- a^2 + ka - 2k + b$ 를 모두 0 이 되게 하면 완전제곱식이 될 것 같습니다. k 를 묶어 가지고요. [처리기술의 오류]

교 : 왜 k 로 묶어? 그렇게 하는 이유는?

학 : k 에 관계없다고 했으니까 k 에다가 어떤 값을 대입해도 $- a^2 + ka - 2k + b$가 0이 되게 하기 위해서요. 그래서 $k(a - 2) - a^2 + b = 0$이 되어야 하는데, k 에 관계없으니까. · · ·

교 : 다시 한번 생각해 보자! k 값에 관계없다는 것이 뜻하는 것이 무엇이지?

학 : 아! $k(a-2)-a^2+b=0$ 가 k 에 관한 항등식이라는 것이요. [교정] 네. 그러니까 $a-2=0$ 이고 $-a^2+b=0$ 이어야 합니다. 그래서 $a=2$ 이고 $-a^2+b=0$ 에 대입하면 $b=4$ 입니다.

교 : 결과를 점검할 수 있겠니? 풀이가 맞는 것 같니?

학 : (한참 생각하고 나서 검토과정을 거친 후) 맞는 것 같습니다.

교 : 문제를 푸는 방법이 이 방법 단 한 가지인가?

학 : 잘 모르겠는데요.

교 : 다른 풀이방법을 생각해보자! 이차식이 완전제곱식이라는 것을 다른 관점에서 표현해보아라. 즉, 문제를 좀 더 다르게 진술할 수 있을까? 정의로 되돌아가 보자!

학 : 아! 완전제곱식이라는 것은 중근을 갖는다는 것이니까 판별식이 0 이면 될 것 같은데요.

교 : 그러면 그 방법으로 풀어보자.

학 : $D/4=a^2-(ka-2k+b)=0$ 이니까. $a^2-ka+2k+b=0$ [처리기술의 오류] $k(-a+2)+a^2+b=0$ 에서 $k(-a+2)=0$ 이고 $a^2+b=0$ 이 되야 하니까. $a=2$ 이고 $a^2+b=0$ 에 $a=2$ 를 대입하면 $4+b=0$ 이 되어야하니까. $b=-4$. 어! 이상하다.

교 : 앞에서 푼 것과 답이 다르게 나왔는데 왜 그렇지? 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? 어떤 것이 옳은 것이니?

학 : (한참 생각하다가) 잘 모르겠는데요.

교 : 각 단계를 점검해 보자!

학 : $D/4=a^2-(ka-2k+b)=0$ 에서 $a^2-ka+2k-b=0$ 이어야 하는데 계산상의 실수를 해서, 그래서 틀렸군요! 다시 하면 $a=2,\ b=4$ 입니다. [교정]

교 : 결과를 점검해 보자. 답이 옳은 것 같은가?

학 : 네. 맞는 것 같은데요.

교 : 지난번에 오류검사를 했을 때는 왜 못 풀었다고 생각하니?

학 : 잘 모르겠는데요.

교 : 아무튼 수고했다. 다른 문제를 하나 더 풀어보자!

문3) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 합이 4 일 때, 방정식 $f(-x+2)=0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

교 : 문제를 읽고 풀이방법을 구상해보자. 부담 없이 네가 생각하고 있는 것을 얘기하면서 문제를 해결해 주기 바란다.

학 : (문제를 읽는다)

교 : 풀이를 한번 구상해보자! 어떻게 풀겠는가?

학 : 이차방정식이라고 했으니까, 우선 $ax^2+bx+c=0$ 이라고 놓고요.

교 : 무엇을?

학 : ···

교 : $f(x)$ 를

학 : 네.

교 : 그렇게 하는 이유는?

학 : $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 이라고 놓고요, 두 근의 합을 구하기 위해서요. 그러면, 두 근의 합은 ··· $-\frac{b}{a}$가 두 근의 합이니까. $-\frac{b}{a}=4$ 가 됩니다. 그러니까 $-b=4a$ 가 됩니다. 우선 이 식을 여기다 대입해 보면

교 : 어떤 식을 어디에다 대입해? 그렇게 하는 이유는?

학 : $f(-x+2)=0$ 을 $f(x)=0$ 에 대입하면, $(-x+2)^2+b(-x+2)+c=0$ 이 됩니다. [처리기술의 오류]

교 : 이 단계를 점검해 보자! 맞는 것 같니?

학 : (다시 생각해보다가) 아! $a(-x+2)^2+b(-x+2)+c=0$ [교정] 를 풀어 보면, $a(x^2-2a+4)-bx+2b+c=0$ [처리기술의 오류]

교 : 무엇을 하고 있는가? 계산이 제대로 된 것 같니?

학 : 전개하면 · · · 아! $a(x^2-2x+4)-bx+2b+c=0$ [처리기술의 오류]

교 : 다시 한번 단계를 점검해 보자. 제대로 된 것 같니?

학 : (각 단계를 점검하며, 한참 생각하다가) $a(x^2-4x+4)-bx+2b+c=0$ 이고 [교정] , 다시 전개하면 $ax^2-4ax+4a-bx+2b+c=0$ 이고, 이것을 x 끼리 묶으면 $ax^2-(4a+b)x+4a+2b+c=0$ 이고, 두 근의 합이 마이너스 · 마이너스는 플러스니까, $\frac{4a+b}{a}$ 는 · · · [처리기술의 오류]

교 : 여기에서 어떻게 해야하지? 다시 처음 주어진 정보에서 새로 출발하여 보자. 무엇을 하고있지?

학 : 합이요, 두 근의 합을 구하는 것인데요, $\frac{4a+b}{a}$ 가 두 근의 합이니까, [교정] $\frac{4a+b}{a}$ 에 $b=-4a$ 를 연립하면, 아니 대입하면, $\frac{4a-4a}{a}=0$ 이 된다.

교 : 그 풀이가 옳다고 생각하니? 결과를 점검할 수 있니?

학 : 네.

교 : 이 문제를 푸는 방법은 단 한 가지인가?

학 : 잘 모르겠는데요.

교 : 이 문제를 다른 방법으로 해결할 수 있는가?

학 : (한참 생각하다가) 생각나지 않는데요. · · · (한참 생각함)

교 : 다른 방법으로 생각해 보자! 방정식의 두 근이 주어지면 그 방정식을 만들어 볼 수 있지?

학 : 네.

교 : 그렇다면 이차 방정식의 두 근을 이용해서 이차식을 만들어 볼 수 있지

않겠니? 어때! 이런 방법으로도 해결할 수 있을 것 같은데!

학 : 두 근을 α, β 라고 하면, $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 이라고 했을 때 ・・・

교 : 그렇게 하는 이유는? $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 가 무엇이지?

학 : $f(x)$ 요. $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 라고 했을 때, $\alpha+\beta=4$ 이고 ・・・ [처리기술의 오류]

교 : 처음 주어진 정보에서 새로 출발하여 보자! 구하고자 하는 것이 무엇이지?

학 : $f(-x+2)=0$ 의 두 근의 합이요. ・・・ (한참 생각)

교 : 어떻게 하면 될까? 여기서부터는 아까 풀었던 것과 같다. 아까 어떻게 풀었지?

학 : 대입해서요. $f(x)$ 에다가 대입해 보면, [교정]

$a(-x+2-\alpha)(-x+2-\beta)=0$ ・・・[처리기술의 오류]

교 : 그것이 뜻하는 것이 뭐지?

학 : $f(-x+2)$ 요,

$f(-x+2)=a(-x+2-\alpha)(-x+2-\beta)=0$ 에서 $-x+2-\alpha=0$ 이거나 $-x+2-\beta=0$이면 $f(-x+2)=0$가 됩니다. $-x+2-\alpha=0$ 와 $-x+2-\beta=0$ 의 변끼리 빼보면. [처리기술의 오류]

교 : 무엇을 하고 있니? 왜 그렇게 빼지?

학 : 두 근을 연립해야 하니까요.

교 : $f(-x+2)=a(-x+2-\alpha)(-x+2-\beta)=0$ 에서 x 를 구하면 그 x 가 뜻하고 있는 것은 뭐니?

학 : 근이요. $f(-x+2)=0$ 의 근이요. 그러면, ・・・ 아! $x=\alpha$ 이니까. $-\alpha+2-\alpha=0$ 에서 $-2\alpha+2=0$, $\alpha=1$ 이요. [처리기술의 오류]

교 : 자! 이 단계를 점검해 보자. $x=\alpha$ 가 갑자기 어디서 나온 것이지?

학 : x 에 α 를 넣었을 때요.

교 : 여기에서 α 가 뭐니?

학 : 근이요.

교 : 무슨 근?

학 : $f(-x+2)=0$ 의 근이요. [문제 파악 미숙에 의한 오류]

교 : 아니지. 잘 생각해봐라.

학 : $f(x)=0$ 의 근이요. [교정]

교 : 지금 무엇인가 혼동하고 있지?

학 : 네.

교 : 그럼 다시 해 보자. 아까 구한 x 가 뭐였지? $-x+2-\alpha=0$ 또는 $-x+2-\beta=0$ 에서 x 를 구할 수 있지?

학 : 여기서요? 구할 수 없는데요. [처리기술의 오류]

교 : 왜 구할 수 없다고 생각하지?

학 : 아! $x=2-\alpha$, $x=2-\beta$ 요. [교정]

교 : 지금 구한 이 x 값은 무엇이지?

학 : $f(x)=0$ 의 근이요. [문제 파악 미숙에 의한 오류]

교 : 아니지! 다시 생각해보아라.

학 : $f(-x+2)=0$ 의 근이요. [교정]

교 : 다시 처음으로 돌아가자. 무엇을 하고있니?

학 : 합을 구하는 것인데요

교 : 무슨 합?

학 : $f(x)=0$ 의 합이요. [처리기술의 오류]

교 : 아니지. 다시 생각해 보아라.

학 : $f(-x+2)=0$ 의 합이요. [교정]

교 : 그래! 이미 두 근이 나왔잖아! 그것을 합하면 되지 않니?

학 : ··· 아닌데요. (한참 생각)

교 : 왜 아니라고 생각하는가?

학 : 아! 두 근 x 를 더하면, $x = 2 - \alpha$ 와 $x = 2 - \beta$ 를 변변 더하면, $2x = 4 - \alpha - \beta$ [처리기술의 오류]

교 : 이 단계를 점검해 보자! 우리가 지금 $f(-x + 2) = 0$ 의 두 근의 합을 구하려고 하는데 이미 $f(-x + 2) = 0$의 두 근을 구하지 않았니?

학 : 아! $2 - \alpha + 2 - \beta = 4 - (\alpha + \beta) = 4 - 4 = 0$ 요. [교정]

교 : 풀이가 맞는 것 같니? 결과를 점검할 수 있니?

학 : 네

교 : 자! 지금 까지 우리는 같은 문제를 두 가지 방법으로 풀어볼 수 있었지?

학 : 네.

교 : 어떤 주어진 문제를 풀 때에는 한 가지 방법으로만 풀 수 있는 것이 아니고, 여러 가지 방법으로 풀 수 있는데, 그 중에서 적절한 전략을 선택하여 네가 푸는 것이고 여기에서 중요한 것은 문제를 이해하고 어떻게 문제를 풀어나갈 것인가 하는 전략을 수립하는 일인데, 이는 네가 이미 학습한 수학적 내용이나 전에 풀어 보았던 문제 중에서 관련이 있는 문제나 유사한 문제를 보고 그것을 활용할 수 있을까? 그 결과를 활용할 수 있을까? 그 방법을 활용할 수 있을까? 등을 생각하여 가장 적절하다고 생각되는 전략을 찾아내어야 하는 것이다. 그리고 풀이과정 중에는 수립한 계획을 실행함에 있어서 매 단계를 점검하여 각 단계가 옳은 지를 확인하여야 하며, 문제를 그렇게 푸는 이유가 무엇인지, 또 지금 내가 무엇을 하고 있는지 등을 항상 생각하여야 하고, 다른 방법으로의 접근을 생각해 보고, 만일 문제가 잘 풀리지 않는다면 처음 주어진 정보에서 새로 출발하여 혹시나 놓친 것은 없는지를 점검해 보아야 하고,. 또 그 문제를 푸는 방법은 단 한 가지인가? 결과가 옳은가? 맞는다고 확신하는가? 하는 것 등을 항상 자기 스스로에게 질문해봄으로써 스스로 오류를 줄일 수 있는 방법을 찾아야 한다. 또한 답이 나왔다면, 그 답이 옳은지 결과가 옳은지 맞는다고 확신하는지 등을 생각하고 점검해 보아야 한다. 끝으로 다른 풀이 방

법은 없는지 주어진 조건을 모두 활용했는지 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수는 없는지 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는지 등을 생각해 보고 유사한 문제를 만들어 보는 습관을 가져야 한다.

학 : 네 잘 알겠습니다.

교 : 수고했다.

⊙ D고교 24번 학생의 변화된 모습

이 학생은 처음에 오류검사를 실시했을 때, 주로 처리기술에서 오류를 보이던 학생이었는데, 두 개의 문항을 제시하면서 다시 면담을 실시한 결과 여전히 처리단계에서 오류를 범하여 문제를 해결하지 못하고 있었다.

첫 번째, 문제2)에서는 연구 대상자가 오류검사의 결과 처리기술의 오류를 범하였으므로 두 가지 전략을 사용하여 문제를 풀어보게 하였다. 하나는 연구대상자가 생각해낸 전략대로 풀어보게 하였고, 또 하나는 연구자가 제시한 전략으로 문제를 풀어보게 하였다. 그 결과 두 가지 전략에서 모두 처리기술의 오류를 범하였다. 그 때마다 그렇게 하는 이유는? 각 단계가 옳은지 명확히 알 수 있는가? 그 것이 뜻하는 것이 무엇인가? 결과가 옳은가? 등의 질문를 하여 연구대상자로 하여금 스스로 오류를 수정해 나가게 하였다. 그 결과 성공적으로 문제를 풀 수 있게 되었다.

두 번째, 문제3)에서도 역시 두 가지 전략을 사용하여 문제를 풀어보게 하였는데 여기에서도 두 가지 모두에서 처리기술의 오류를 범하였다. 역시 문제2)의 경우와 마찬가지로 그 때 마다 각 단계를 점검하게 시켰고, 풀이가 옳은 것 같은가? 계산이 제대로 된 것 같은가? 처음 주어진 정보에서 새로 출발하여 보아라. 무엇을 하고 있는가? 그 단계가 옳다고 생각하는가? 왜 그렇게 생각하는가? 처음으로 다시 돌아가 보아라. 무엇을 하고 있는가? 그 단계를 점검해보아라. 하는 등의 질문을 함으로써 연구대상자 스스로 오류를 수정하면서 문제를 해결하게 하였다. 그 결과 성공적으로 문제를 해결할 수 있게 되었다. 끝으로

수학문제해결에 있어서 풀이과정 중에는 항상 수립한 계획을 실행할 때 매 단계를 점검하여 각 단계가 옳은 지를 확인하여야 하며, 문제를 그렇게 푸는 이유가 무엇인지, 또 지금 내가 무엇을 하고 있는지 등을 항상 생각하여야 하고, 다른 방법으로의 접근을 생각해 보고, 만일 문제가 잘 풀리지 않는다면 처음 주어진 정보에서 새로 출발하여 혹시나 놓친 것은 없는지를 점검해 보아야 하고, 또 그 문제를 푸는 방법은 단 한 가지인가? 결과가 옳은가? 맞는다고 확신하는가? 하는 것 등을 자기 스스로에게 질문해봄으로써 스스로 오류를 줄일 수 있는 방법을 찾아내야 한다는 것을 알려줌으로써 전보다는 오류의 발생회수를 줄일 수 있으리라고 기대하게 되었다.

일반적으로 답을 구하는 문제의 경우 그 중요 부분은 미지의 것, 자료, 조건이며 증명하는 문제의 경우에는 중요 부분을 가정과 결론으로 볼 수 있다. 그러나 이는 문제의 구성요소를 단순하게 파악한 것이다. 흔히 수학 문제에서는 연산 및 조작이 문제를 해결하는 결정적인 단서가 되기도 한다. 또한 수학 문제 이외의 문제에서는 연산 및 조작의 역할이 더욱 크다고 할 수 있다. 예를 들어 다음과 같은 문제를 풀기 위해서는 저울에 무게를 재는 조작의 암시적 성질, 즉 저울을 한 번 사용할 때마다 나오는 결과는 두 가지가 아니라 세 가지라는 사실을 알아야만 한다.

> "여기에 24개의 금화가 있다. 이 중 23개는 무게가 같고 나머지 하나는 다른 것보다 무겁다고 한다. 어느 금화가 무거운 것인지 가려내는데 양팔 저울을 되도록 적게 사용하고 이것을 알아내는 방법을 말해보아라."

따라서 문제해결자가 문제를 접했을 때 주의를 기울여야 하는 문제의 주된 구성 요소에는 연산 및 조작이 반드시 포함되어야 하며 교사는 이를 학생에게 주지시켜야 한다. 결국 문제를 파악할 때 문제의 주된 구성요소로 그 문제를 해결하기 위한 연산 및 조작에는 무엇이 있는지를 파악하게 함으로써 문제해

결자가 범하는 처리기술의 오류를 줄일 수 있다고 생각한다.

또한 학생이 몇 줄이나 되는 긴 계산을 했을 때 마지막 줄을 보면 계산이 틀린 것을 알게되지만 교사는 곧바로 틀렸다고 말하는 것을 삼가 하고 그 학생과 한 줄 한 줄씩 검토하면서 계산의 오류를 학생 스스로 발견하게 하여야 한다. 그 과정에서 그는 어떤 것을 배우게 된다. 그러나 단번에 '이것은 틀렸다'고 말해 버린다면 그 학생은 화가 나게 될 것이며 그 후에 교사가 말하는 것에 주목하려 들지 않을 것이다. '이것은 틀렸다'라는 말을 너무 자주 하게 되면 그 학생은 수학교사와 수학을 싫어하게 될 것이고 교사의 모든 노력은 그 학생에게 관한 한 실패할 것이다. '틀렸다'라고 말하는 대신 가능하면 '옳다. 그러나・・・'라고 서두를 꺼낸다면 이는 위선적인 행동이라기보다는 오히려 인간적인 행동이다. 결국 억지로 강요하지 말고 제안하는 방법이 학생들이 계산의 오류를 발견하게 하는 좋은 방법이라고 생각한다.

따라서 학생들의 오류(특히 처리기술의 오류)를 교정하는 좋은 방법은 문제를 파악할 때 문제의 주된 구성요소로 그 문제를 해결하기 위한 연산 및 조작에는 무엇이 있는지를 파악하게 함으로써 문제를 어떻게 풀어야 할지를 생각하도록 하고 또한 억지로 강요하지 말고 제안함으로서 학생 스스로 오류를 발견하여 이를 수정하도록 하는 방법을 제안하고 싶다.

B. 논의

본 연구에서 밝혀진 연구 결과를 선행 연구와 관련지어 연구 문제별로 그 결과를 논의하면 다음과 같다.

첫째, 인문계 고등학교 1학년 학생들의 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 유형을 설정해서 분류해 보았다. 인천광역시에 소재하고 있는 인문계고등학교에서 성적수준이 중위권인 세 개 학교(D고교, Y고교, S고교)를 선정하여 각각 1학년학생 한 개 학급씩 총 세 개 학급

132명을 대상으로 오류검사를 실시한 결과 학생들이 흔히 범하는 오류의 유형은 전략선택의 오류(41.46%), 이해의 오류(23.93%), 처리기술의 오류(19.96%), 애매 모호한 오류(8.41%), 반성의 미 실행에 의한 오류(6.24%)의 순서로 나타났다. 각 학교별로 나타난 오류의 유형을 살펴보면 다음과 같다.

D고교의 경우, 전략선택의 오류(14.90%), 이해의 오류(9.25%), 처리기술의 오류(6.25%), 애매 모호한 오류(2.52%), 반성의 미 실행에 의한 오류(2.40%)의 순서로 나타났다.

Y고교의 경우, 전략선택의 오류(14.14%), 이해의 오류(9.01%), 처리기술의 오류(7.93%), 반성의 미 실행에 의한 오류(2.88%), 애매 모호한 오류(2.52%)의 순서로 나타났다.

S고교의 경우, 전략선택의 오류(12.38%), 처리기술의 오류(5.77%), 이해의 오류(5.65%), 반성의 미 실행에 의한 오류(3.36%), 애매 모호한 오류(1.92%)의 순서로 나타났다. 세 학교 모두에서 전략선택의 오류가 가장 많이 발생하였다는 것은 학생들이 수학적 정리나 정의를 이해하는 데에 문제가 있다는 것을 나타내는 것이며, 또한 학생들이 문제풀이의 경험이 없다는 것을 드러내는 것이다. 따라서 앞으로의 수학과 수업에 있어서는 충분한 개념학습을 강조함과 아울러 이를 활용할 수 있는 지도에 중점을 두어야 하고, 학생들에게 스스로 문제를 풀어볼 수 있는 기회를 보다 많이 제공함으로써 학생들에게 문제풀이의 경험을 제공하여야 한다고 생각한다. 한편, 각 학교에서 나타난 오류의 발생 빈도를 비교해 볼 때 인천광역시내에서는 지역간의 차이가 그리 심하지 않다고 생각한다.

둘째, 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 원인을 찾아볼 수 있었다. 학생들은 방정식과 부등식에 관한 수학문제해결 과정에서 정리나 정의를 정확히 이해하고 기억하여 문제풀이에 적용하고 실행하는 데 가장 어려움을 겪고 있었으며, 서로 관련된 수학적 내용을 총체적으로 이해하지 못하고 별개의 것으로 따로 기억하고 있었다.

Skemp(1987)의 실험에 의하면 이해를 강조하여 수학의 정리나 정의를 지도한 집단은 그렇지 않은 집단보다 실험 후의 기억 정도 및 전이 정도에서 좋은 효과를 나타내어 문제 풀이에 효율적인 반응을 보였다고 한다(김옥경. 1990). 따라서, 정리를 지도할 때 학생들이 이해를 잘 할 수 있도록 그 정리가 조건 또는 가정에 따라 어떤 문제에 용이하게 쓰인다는 것을 강조하여 지도할 필요가 있다. 또한 많은 학생들이 논리적으로 연역은 어느 정도 해 내지만 그 근거를 밝히지 못하는 것은 평소 문제를 해결할 때 근거를 기술하는 습관이 부족하거나 정리의 내용을 명확히 이해하지 못하고 있는 것으로 보인다. 따라서 주관식 문제에 대한 평가를 실시하여 학생들의 문제풀이 과정의 채점을 정확히 함으로써 학생들에게 근거에 입각하여 정확한 표현을 하게 하는 연습을 시켜야 하며, 기호나 부호를 바르게 사용할 수 있도록 지도하고, 부주의 또는 실수로 인한 기술적인 오류를 줄일 수 있도록 해야하겠다.

김옥경(1990)은 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류 모델에 관한 연구에서 교과 내용 전 영역에 걸친 문제풀이 과정에서의 오류를 분류하였는데, 곡해된 정리나 정의(30.2 %)에 대한 오류가 가장 많이 발생한 것으로 주장하고 있다. 여기에서 이차방정식과 부등식의 문제해결뿐 아니라 다른 영역에서도 정리나 정의의 부적절한 적용과 실행이 가장 많이 나타나고 있음을 볼 수 있다.

학생들의 오류 경향을 최소화하기 위해서는 어떤 학습형태가 바람직 할 것인가? 각각의 오류의 범주를 최소화 할 수 있는 효과적인 수학교수법이 창안된다면 우리 나라 수학교육의 발전에 조금이나마 도움이 되리라고 생각한다. 이런 의미에서 연구자는 본 자료를 토대로 하여, 일선 수업현장에서 학생들을 지도함에 있어 염두에 두어야 할 내용들을 다음과 같이 제안하고자 한다.

① 교과학습에서 충분한 개념학습을 강조함과 아울러 이를 활용할 수 있는 지도에 중점을 두어야 한다.

② 학생들의 논리적 사고 함양을 위해 교육자 자신부터 논리적 사고의 태도

를 보여야 한다.

③ 문제해결시 우선 문제를 부분적으로보다는 전체적으로 파악하고 주어진 조건들을 종합 재구성할 수 있는 능력이 길러질 수 있도록 지도해야 한다.

④ 교재 연구시 각 단원마다 학생들이 오류를 범하기 쉬운 내용들을 충분히 연구하여, 미리 학생들에게 반례(Counter example)를 들어 보임으로써 학생들의 오류를 최소화해야 한다.

⑤ 학생들에게 동일한 문항을 여러 형태로 제시해 보임으로써 다양한 방법으로 학생들이 문제를 이해하고, 이를 해결할 수 있는 능력을 길러 누어야 한다.

⑥ 수업시간 중에 학생들에게 문제를 해결할 수 있는 기회를 많이 부여하고 교사는 학생들의 사고의 진행과정을 파악하기 위해 노력해야 한다.

⑦ 문제를 풀이하는 방법은 하나만 존재하는 것이 아니라 여러 가지 풀이 방법이 있다는 것을 보여줌으로써 이런 다양한 풀이방법을 다른 문제의 풀이에 이용할 수 있도록 지도해야 한다.

⑧ 학습과정에서 발생하는 오류는 학습의 실패 원인에 대한 가치 있는 정보를 제공하고 그 대안을 제시한다는 점을 고려해 볼 때, 효과적인 수학교육을 위해서는 문제의 결과보다는 문제를 풀어나가는 과정에서 발생하는 오류현상에 보다 관심을 두어 그 인지적 원인을 파악하고 수정해 나가는 노력이 이루어져야 한다. 현재 일선 학교에서 행해지고 있는 정규고사(중간, 기말고사)는 객관식위주의 시험이고(대부분 객관식대 주관식의 비율이 7 : 3 내지는 6 : 4 임) 주관식도 채점에 따른 여러 가지 불안요소(시간이 많이 소요됨, 공평성 문제, 책임성 문제 등) 때문에 단답형 내지는 완성형의 형태로 제시되고 있는 실정이다. 학습의 실패원인을 진단하고 처방하기 위해서 학생들이 문제를 어떻게 푸는지 그 과정을 면밀히 검토해 볼 필요가 있다는 것에는 이론의 여지가 없다고 하겠다. 그러나 현재와 같은 실정에서 교사는 학생들의 문제풀이과정을 지켜볼 기회가 많지 않다. 따라서 정규고사를 모두 주관식 서술형위주로 출제하고(경우에 따라서는 단답형 이나 완성형도 포함시켜 운영의 묘를 살릴 수 있

다), 교사는 교육자적 양심을 가지고 공정한 채점을 하며 평가 후 에는 반드시 오류분석을 하여 그 결과를 학생들에게 알려줌으로써 두 번 다시 그와 같은 오류를 범하기 않도록 추수지도를 해야 한다.

셋째, 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 교정과정을 밝혀볼 수 있었다. D고교 학생 3명을 대상으로 1 : 1로 면담을 실시함에 있어서 학생들의 인지적 활동을 유도하기 위한 초점을 맞춘 질문을 한 결과 세 학생 모두 성공적으로 문제를 해결할 수 있었다. 따라서 Polya가 제시한 문제해결을 위한 4단계전략을 구체적인 문제 상황에 적용할 수 있는 세부전략으로 좀더 상세히 하여 학생들에게 각 전략의 명칭을 주지시킨다. 이렇게하여 학생들로 하여금 각 전략에 대한 명칭의 언급이나 연상만으로도 그 전략을 사용할 수 있도록 전략자체를 직접 가르침으로써 학생들에게 문제해결을 절차를 가르치는 기술이 아니라 하나의 학습법으로 가르친다면 학생들은 오류를 훨씬 더 많이 줄일 수 있으리라고 생각한다.

아울러 각 오류 유형 중 이해의 오류, 전략선택의 오류, 처리기술의 오류를 줄이기 위한 방법으로 문제 제기, 반성의 단계를 활용하기, 연산 및 조작을 활용하기를 강조하여 가르칠 필요가 있다.

Ⅵ. 결론 및 제언

A. 결론

본 논문에서는 학생들이 수학 문제 해결과정에서 흔히 나타내는 오류의 유형을 분류해보고, 그 원인을 찾아보며, 학생들과 1 : 1로 면담을 통하여 그들의 문제해결 과정에서 교사가 적절하게 초점을 맞춘 질문을 하여 학생들의 인지적 활동을 유도함으로써 오류의 교정과정을 살펴보고자 하였다.

연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 세 가지 연구 문제를 설정하였다: (1) 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 유형을 설정해서 분류할 수 있는가? (2) 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 원인을 찾아볼 수 있는가? (3) 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 교정 과정을 밝혀낼 수 있는가?

본 연구를 수행하기 위해서 인천광역시에서 학력수준이 중위권에 있는 인문계고등학교 중에서 D, Y, S 세 개 고등학교를 선정하여 오류의 유형분류와 원인분석을 하기 위하여 각 학교에서 한 학급씩 세 학급 전체 132명의 학생을 선정하였으며, 오류의 교정과정을 알아보기 위하여 D고등학교 학생 3명을 연구대상으로 선정하였다. 오류 검사를 하기 위한 오류 검사지는 이차방정식에 관한 문항 8개와 이차부등식에 관한 문항 5개 총 13개 문항으로 구성하였다. 또한 오류의 교정 과정을 살펴보기 위한 교정 검사지는 위의 오류 검사지의 문항과 비슷한 유형의 문항으로 이차방정식에 관한 문항 2개, 이차부등식에 관한 문항 2개, 이차방정식과 이차부등식을 하나의 범주로 연결하는 문항 1개를 작성하여 D고교 학생들 중 사전 오류 검사에서 비슷한 오류를 범한 학생 3명을 선정하여 각 학생에게 두 문항씩을 제시하고 면담을 실시하였다. 그 결과 다음

과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 학생들이 흔히 범하는 오류의 유형은 전략선택의 오류(41.46%), 이해의 오류(23.93%), 처리기술의 오류(19.96%), 애매 모호한 오류(8.41%), 반성의 미실행에 의한 오류(6.24%)의 순서로 나타났다.

여기에서 오류의 발생빈도를 보면 세 학교 모두에서 전략선택의 오류가 가장 많이 발생했다는 것을 알 수 있다. 이것은 학생들이 수학적 정리나 정의를 이해하는 일에 문제가 있다는 것을 나타내는 것이며, 또한 학생들이 문제풀이의 경험이 없다는 것을 드러내는 것이다. 따라서 앞으로의 수학과 수업에 있어서는 충분한 개념학습을 강조함과 아울러 이를 활용할 수 있는 지도에 중점을 두어야 하고, 학생들에게 스스로 문제를 풀어볼 수 있는 기회를 보다 많이 제공함으로써 문제풀이의 경험을 많이 가질 수 있도록 하여야 한다고 생각한다.

둘째, 앞서 분석한 오류모델과 그 빈도수를 토대로 하여 학생들이 흔히 범하는 오류의 원인을 살펴보면 다음과 같다.

① 학생들은 아마도 그들이 배운 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하거나 또는 알고 있으면서도 활용할 수 있는 능력이 부족하다.

② 학생들은 전에 풀어본 문제와 연관짓기를 못하거나 문제를 다르게 진술하지 못하는 경우가 많다.

③ 문제에 포함된 핵심적 개념을 잃어버리거나 고려하지 못하는 경우가 많다.

④ 학생들은 주어진 문제를 풀기 위해 문제의 조건으로 주어진 자료를 무시하거나 혹은 잘못 사용하는 경우가 많다.

⑤ 학생들은 문제에 주어진 조건을 여러 부분으로 분해함으로서 문제풀이에 필요한 정보를 찾아내어야 하는데 조건을 여러 부분으로 분해하지 못하는 경우가 많다.

⑥ 학생들은 문제의 유형에 따라 답하는 경향이 다르다. 즉, 주어진 문제를 기호나 식, 그림, 문장제 등의 어떤 형태로 주어졌을 때, 이 문제를 풀기 위해

다른 형태로 번역하는 과정에서 많은 실수를 한다.

⑦ 학생들이 너무나 잘 알고 있으리라 믿었던 계산상의 오류경향도 많았다.

⑧ 학생들은 아무런 근거 없이 논리적으로 부적절한 확대 해석을 한다.

셋째, 학생들의 오류 교정 과정을 살펴보기 위하여 D고교 학생 3명과 면담을 실시하여 Ⅴ장에서 제시한 언어약정과 부록으로 제시한 쓰여진 약정을 얻을 수 있었으며, 학생들의 인지적 활동을 유도할 수 있는 초점을 맞춘 질문을 사용하여 학생들이 스스로 융통성 있는 사고를 하게 함으로써 3명의 학생 모두가 성공적으로 문제를 해결할 수 있었다. 따라서 Polya가 제시한 문제해결을 위한 4단계전략을 구체적인 문제 상황에 적용할 수 있는 세부전략으로 좀더 상세히 하여 학생들에게 각 전략의 명칭을 주지시킨다. 이렇게하여 학생들로 하여금 각 전략에 대한 명칭의 언급이나 연상만으로도 그 전략을 사용할 수 있도록 전략자체를 직접 가르침으로써 학생들에게 문제해결을 절차를 가르치는 기술이 아니라 하나의 학습법으로 가르친다면 학생들은 오류를 훨씬 더 많이 줄일 수 있으리라고 생각한다.

아울러, 각 오류 유형 중 이해의 오류, 전략선택의 오류, 처리기술의 오류에 대한 교정방법을 문제 제기, 반성의 단계를 활용하기, 연산 및 조작을 활용하기와 연관하여 다음과 같이 제안하고자 한다.

1) 이해의 오류의 경우

최근에 들어와서 문제 해결 교육을 개선하고 수학적 사고 능력을 발전시키기 위해서는 주어진 문제를 수동적·완결적으로 다룰 것이 아니라, 능동적·발전적으로 취급해야 한다는 주장과 함께 '문제 제기(problem posing)'의 필요성이 대두되고 있다. 우리가 어떤 것을 '알게 된다는 것'은 단지 빈 공간에 '채워 지는 것'과는 근본적으로 다르다고 하겠다. Brown과 Walter(1990)는 어떤 것을 알게 되는 것은 '단지 구경하는 스포츠'가 아니라 '참여하는 스포츠'임을 밝히고 있다. 즉, 그것은 우리가 이해하려고 하는 것에 작용하여 영향을 줄뿐만 아

니라 심지어 그것을 수정하기까지 하려는 적극적인 자세가 요구된다는 것이다. 이런 태도의 육성이 바로 문제 제기의 중심적인 목표이다.

Brown과 Walter(1990)에 의하면 문제 제기는 두 가지 방식으로 문제 해결 활동과 깊은 관련을 맺고 있다. 첫째, 문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제를 제기함으로써 원래의 문제를 재해석하게 되고 문제를 해결할 수 있는 단서가 생기게 된다는 데 있다. "이 문제는 실제로 무엇을 뜻하고 있는가?" 또는 "이 문제의 분명한 요소처럼 보이는 것에서 그렇지 않은 부분으로 초점을 옮기면 어떻게 되는가?"와 같은 질문은 원래의 문제를 해결하려는 노력 속에 새로운 문제를 생성시키게 하는 것이다. 둘째, 원래의 문제와는 다른 새로운 문제를 만들고 그것을 분석해보지 않으면, 문제를 해결해 놓고서도 의미를 충분히 이해하지 못할 때가 있다는 것이다.

문제해결자가 문제 제기에서 얻을 수 있는 이익에는 관련된 내용을 과거와는 전혀 다른 새로운 관점에서 볼 수 있다는 것뿐 아니라 그 내용으로부터 새로운 아이디어를 생각할 수 있다는 데에 있다. 그 뿐만 아니라 문제 제기는 수학에 대한 불안감을 해소하는 역할을 하기도 한다. 왜냐하면 교사가 제시한 문제에 대한 해답을 찾는 것만으로 이루어진 수업에서는 오답에 대한 불안감이 있을 수 있지만, 학생 스스로 문제를 제기하는 수업에서는 자유롭게 의견을 제안할 수 있으므로 수학이 보다 친근한 과목이 되게 할 수 있으며, 학생에게 수학에 대한 자신감을 심어 줄 수 있는 것이다. 또한 문제 제기는 학생들 간에 경쟁심보다 공동 학습을 촉진시키는 역할을 할 수 있다.

그러나 현재의 일선 수업현장에서는 문제 해결에만 관심을 보일 뿐 문제 제기에 대해서는 거의 관심을 갖고 있지 않다. 교사와 학생은 단지 산이 거기에 있으니까 올라간다고 하는 것처럼, 그저 문제가 있으니까 해결한다는 입장을 취하고 있다. 그들은 주어진 문제가 어디에서 나왔는지 알아보려고 하지 않는 것은 물론 문제가 어떻게 다르게 형식화될 수 있는지를 알려고 하지 않는 것이 보통이다.

따라서 학생들의 오류(특히 이해의 오류)를 줄이기 위한 방법으로 문제 제기를 제안하고자 한다. 즉 문제를 해결하기 위한 수단으로 문제 제기를 제안하고자 하는 것이다. 학생들은 주어진 문제를 접했을 때 문제 제기를 함으로써 관련된 내용으로부터 과거와는 전혀 다른 새로운 관점을 얻을 수 있으며, 그 내용으로부터 새로운 아이디어를 생각할 수 있게되고, 수학에 보다 친근함을 느끼게 되며, 수학에 대한 자신감을 가질 수 있게되어 이러한 경험을 바탕으로 하여 다른 문제가 주어졌을 때 그 문제에 대한 이해를 높일 수 있고 나아가 이해의 오류를 줄일 수 있으리라고 생각한다.

2) 전략선택의 오류의 경우

Polya의 문제해결 과정 4단계에서 반성의 단계는 학생들이 문제해결을 통해 학습할 수 있는 결정적인 기회를 제공하는 가장 중요한 활동이라고 생각한다. 그러나, Kantowski(1977)는 교사가 반성하기를 강조하면서 지도하였음에도 불구하고 풀이를 반성하는 습관이 형성되었다는 증거는 거의 찾아 볼 수 없었다고 보고하고 있다. 즉 학생들은 반성하는 습관을 획득하기를 어려워한다는 것이다. 일선학교에서 학생들로 하여금 반성하는 습관을 기르도록 지도하는 것은 쉬운 일이 아니다. 풀이 과정을 평가할 수 있는 시험이 없는 데다 정해진 수업내용(교육과정)을 지도해야 한다는 의무감이 앞서고 학생들이 예상과 달리 사고의 혼란을 일으키기도 하기 때문이다. 그럼에도 불구하고 반성하는 습관은 매우 중요하다.

많은 문제가 이전의 풀이로부터 유추에 의해 해결되는 경우가 많다. 훌륭한 문제해결자는 문제해결 결과와 그 구체적인 풀이 방법을 매우 중요하게 다루어야 한다. 이렇게 함으로써 다른 문제를 해결할 때 전에 풀어본 문제로 관련된 문제에 무엇이 있는지를 생각하여 그것을 활용할 수 있는지, 그 결과를 활용할 수 있는지, 그 방법을 활용할 수 있는지, 어떤 보조요소를 도입하면 그것을 활용할 수 있는지를 생각해 낸다면 새롭게 주어진 문제의 해결에 많은 도

움이 될 것이다. 그러나 현재 일선 학교 수업 현장에서는 결과를 얻어내어 답을 맞추는 것에만 급급한 나머지 문제해결을 통해 학습을 증진시킬 수 있는 방법에 대해서는 무관심하다.

문제해결 능력의 발달은 자기가 푸는 문제에 주의를 집중하고 반성하는 데에 의존하며, 일반적인 문제를 설정하여 그것을 풀어보는 것은 문제해결 능력의 개발에 도움이 된다고 생각한다. 따라서 현실적으로 여러 가지 어려운 상황에도 불구하고 학생들의 오류(특히 전략선택의 오류)를 줄이기 위한 방법으로 어떤 문제를 해결할 때 반성의 단계를 활용하여 문제상황을 개발하고 탐구하도록 하며, 문제를 확장하여 일반화하도록 하며, 해를 일반화하도록 하며, 문제풀이 과정을 일반화하도록 하며, 자기 반성 태도를 개발하도록 할 것을 제안하고 싶다.

3) 처리기술의 오류의 경우

일반적으로 답을 구하는 문제에서 그 중요 부분은 미지의 것, 자료, 조건이며 증명하는 문제에서는 그 중요 부분을 가정과 결론으로 볼 수 있다. 그러나 이는 문제의 구성요소를 너무 단순하게 파악한 것이다. 흔히 수학 문제에서는 연산 및 조작이 문제를 해결하는 결정적인 단서가 되기도 한다. 또한 수학 문제 이외의 문제에서는 연산 및 조작의 역할이 더욱 크다고 할 수 있다. 예를 들어 다음과 같은 문제를 풀기 위해서는 저울에 무게를 재는 조작의 암시적 성질, 즉 저울을 한 번 사용할 때마다 나오는 결과는 두 가지가 아니라 세 가지라는 사실을 알아야만 한다.

> "여기에 24개의 금화가 있다. 이 중 23개는 무게가 같고 나머지 하나는 다른 것보다 무겁다고 한다. 어느 금화가 무거운 것인지 가려내는데 양팔 저울을 되도록 적게 사용하고 이것을 알아내는 방법을 말해보아라."

따라서 문제해결자가 문제를 접했을 때 주의를 기울여야 하는 문제의 주된 구성 요소에는 연산 및 조작이 반드시 포함되어야 하며 교사는 이를 학생에게 주지시켜야 한다. 결국 문제를 파악할 때 문제의 주된 구성요소로 그 문제를 해결하기 위한 연산 및 조작에는 무엇이 있는지를 파악하게 함으로써 문제해결자가 범하는 처리기술의 오류를 줄일 수 있다고 생각한다.

또한 학생이 몇 줄이나 되는 긴 계산을 했을 때 마지막 줄을 보면 계산이 틀린 것을 알게되지만 교사는 곧바로 틀렸다고 말하는 것을 삼가 하고 그 학생과 한 줄 한 줄씩 검토하면서 계산의 오류를 학생 스스로 발견하게 하여야 한다. 그 과정에서 그는 어떤 것을 배우게 된다. 그러나 단번에 '이것은 틀렸다'고 말해 버린다면 그 학생은 화가 나게 될 것이며 그 후에 교사가 말하는 것에 주목하려 들지 않을 것이다. '이것은 틀렸다'라는 말을 너무 자주 하게 되면 그 학생은 수학교사와 수학을 싫어하게 될 것이고 교사의 모든 노력은 그 학생에게 관한 한 실패할 것이다. '틀렸다'라고 말하는 대신 가능하면 '옳다. 그러나···'라고 서두를 꺼낸다면 이는 위선적인 행동이라기보다는 오히려 인간적인 행동이다. 결국 억지로 강요하지 말고 제안하는 방법이 학생들이 계산의 오류를 발견하게 하는 좋은 방법이라고 생각한다.

따라서 학생들의 오류(특히 처리기술의 오류)를 교정하는 좋은 방법은 문제를 파악할 때 문제의 주된 구성요소로 그 문제를 해결하기 위한 연산 및 조작에는 무엇이 있는지를 파악하게 함으로써 문제를 어떻게 풀어야 할지를 생각하도록 하고, 또한 억지로 강요하지 말고 제안함으로서 학생 스스로 오류를 발견하여 이를 수정하도록 하는 방법을 제안하고 싶다.

B. 제언

본 연구의 과정에서 나타난 결과를 바탕으로 부족함과 제한점을 보완하여 보다 좋은 후속연구를 위하여 다음의 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에서는 인문계고등학교 1학년 학생을 대상으로 이차방정식과 부등식 영역만으로 한정하여 오류의 유형을 분석하였는데 다른 대상이나 다른 수학의 영역에서도 구체적 연구가 필요하다.

둘째, 약정 방법(Protocol Methods)에서 면담 기술을 좀더 연구하여 학생들의 내적인 인지적 활동을 좀더 확실히 파악할 필요가 있으며, 학생들의 인지과정의 본질과 구조를 명시할 필요가 있다.

셋째, 면담을 실시함에 있어 임상연구의 대상이 되는 학생들의 수를 좀더 늘려서 더 많은 프로토콜을 작성하여 파악할 필요가 있다.

참고문헌

김명렬 · 김창동 · 박수화. (1997). 고등학교 공통수학. 서울: (주)중앙교육.

김응태 · 박한식 · 구광조. (1994). (증보) 수학 교육학 개론. 서울대학교 출판부. pp.309 311.

김옥경. (1990). 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구. 이화여자대학교 석사학위 논문. pp.6 13.

김연식, 장태환. (1982). 인문계고등학교 수학Ⅰ 교사용지도서. 서울: 삼화출판사. pp.122 125.

NCTM. (1989). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 구광조 · 오병승 · 류희찬(공역)(1998). 서울: 경문사.

류명희. (1992). 유사한 수학문제의 분류 기준과 전략의 전이와의 관계. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문. pp.9 15.

류성림. (1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문. pp.50 57.

류한영. (1999). 중학교 3학년과 고등학교 1학년들의 방정식에 대한 오류분석에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문. pp.7 27.

박을용 외 6인. (1995). 수학대사전. 서울: 한국사전연구사.

서울대학교 교육연구소. (1994). 교육학용어사전. 서울: 도서출판 하우.

신인숙. (1996). 중학생의 함수에 대한 오개념 및 오류에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문. pp.55 61.

오세경. (1995). 수학 학습지도에 있어서의 오류유형의 분류 및 그 지도방안에 대한 연구. 충북대학교 석사학위 논문. pp.12 13.

오정현. (1996). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구. 이화여자대학교 석사학위 논문. pp.22 25.

우정호. (1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부. pp.225 229.

이상원. (1993). 고등학교 학생의 대수 문제 해결: 전략과 오류 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문. pp.42 52.

이현구 외 6인. (1995). 고등학교 공통수학. 서울: (주)천재교육.

임성식. (1990). 오류 유형 분석을 통한 명제 지도. 영남대학교 석사학위 논문. p.20.

장희숙. (1996). G. Polya와 W. A. Wickelgren 의 수학 문제해결 교육론 비교 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위 논문. pp.45 51.

정은실. (1994). Polya의 수학적 발견술 연구. 서울대학교 박사학위 논문. pp.124 137.

Polya, G. (1957). 어떻게 문제를 풀 것인가. 우정호 역. 서울: (주)천재교육.

한글학회. (1992). 우리말 큰사전. 서울: 어문각.

Brown, S.I. , & Walter, M.I. (1990). The art of problem posing. Lawrence Erlbaum Associates. Publishers.

Clayton, G.A. , Wilson, B., Scott, K.B. & Dorough, L. (1990). Successful Mathematics Teaching for Middle-School. Washington, D.C.: Office of educational Research and Improvement. ED 316-432.

Clements, M.A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. Educational Studies in Mathematics. Vol.Ⅱ. pp. 1-21.

Knifong, J.D. , & Holtan, B. (1976). An analysis of children's written solutions to word problems. Journal for research in mathematics education. pp.106-112.

Kantowski, M.G. (1977). Processes involved in mathematics problem solving. Journal for research in mathematics education, Vol.8. pp.163-180.

Krulik, S. , & Rudnik, J.A. (1987). What are heuristics? Problem solving: a Handbook for teacher. Allyn and Bacon, Inc. pp.19 44.

Krulik, S. , & Rudnik, J.A. (1982). Teaching problem solving to preservice teachers, Arithmetic Teacher. Feb. 1982. p.4.

Newman, M.A. (1981). Comprehension of the language of mathematics, Mathematics Education Research of Australia. Adelaide.

Hadar, N.M. , & Zasalarsky, O. (1987). An empirical classifical model for errors in high school mathematics. Journal for research in mathematics education, Vol. 18. pp.3-14.

Polya, G. (1967). Mathematical Discovery. Vol. II.: John Wiley & Sons. Inc. pp.115 120.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education, Journal for research in mathematics education, Vol. 10. pp. 163-172.

ABSTRACT

On the analysis and correction of errors for the quadratic equation and inequality of high school students

Woo, Hyun Chul

Major in Educational Mathematics

Graduate School of Education
Korea National University of Education
Chung-Buk, Korea

Supervised by Professor, Cho, Min Shik, Ph. D

The purpose of this thesis is to analyze the types and causes of errors happening in the process of solving quadratic equation and inequality of high school students. Moreover, we offer basic materials to improve the skills to solve problems by examining correction process.

We set up three stages. The first is to classify the types of errors in the process of solving quadratic equation and inequality. The second is to point out the causes of errors. Finally We offer the proper correction process for the errors.

The following are the results of this thesis:

After interviewing three students of D High School to find out the correction process of errors, the verbal protocol in chapter five and the written protocol given as an index are established, and all of the three students successfully solved the problem as they were given cognitive questions that made them think in flexible ways. Accordingly, if Polya's four-stage strategy is explained in detail for students to solve specific problems, the students are surely helped to solve them by being familiar with the names of the stages. In other words, if we teach them the strategy not as a mere technique to solve a problem but as a genuine learning method, the students can avoid much errors as they are being helped by simple mentioning of the names and by the association of the strategy.

Moreover, among the types of errors, we want to suggest the following to link the

error in understanding, the error in the choice of strategy, the error in managing skill to the stages of problem posing, reflection, operation and manipulation.

1) In the case of error in understanding : When students are given problems, they can obtain a totally new point of view by doing problem posing, get a new idea, be familiar with mathematics, and have confidence in themselves. Based on the experience, they can show better understanding in another problem, and naturally, the possibility of error will decrease. Therefore, we suggest problem posing as a way of diminishing students' errors (especially in understanding).

2) In the case of error in the choice of strategy : The improvement of ability of solving problems depends on the degree of concentration and reflection upon the problems students are given, while setting up general problems and solving them can develop the ability of solving problems itself. Therefore, in spite of several practical difficulties, we insist that students, making the most use of reflection stage, develop problematic situations, study them, generalize them, generalize the solution, and generalize the process of solving problems to reduce errors in their performance.

3) In the case of error in managing skill : Operation and manipulation often play a role as the definite clue in solving problems. The desirable way of correcting students' error is to let them find out the major operation and manipulation for the specific problem, and encourage them to think over it. In addition, teachers are expected to avoid an immediate judgment on the answer of the problem a student just finished with many lines of demonstration, though they know the answers might be wrong. Rather, teachers are requested to help the student find out the error by himself, examining the problem in detail with him. In the process, the student will get the point. Therefore, we teachers should not force students to find out answers, but suggest helpful ways for them to discover errors and correct them by themselves.

* A thesis submitted to the Committee of the Graduate School of Korea National University of Education in Partial Fulfillment of the requirement for the degree of Master of Education in February, 2000.

오류검사지 (부록 A)

1) 본 검사는 여러분이 방정식과 부등식에 대해서 어느 정도 이해하고 있는지를 알아보기 위한 것으로서, 검사의 결과는 공개되지 않으며, 단지 수학 교육 개선을 위한 연구의 목적에 사용하기 위하여 실시합니다. 문제를 잘 읽고 최선을 다하되 부담 없이 해결하여 주기 바랍니다.
2) 연습지 없이 직접 풀이과정과 답을 문제지 에 적어 넣기 바라며, 만일 오류가 발생되었을 때는 지우거나 알아보지 못하게 없애버리지 말고 두 줄로 그어 삭제의 뜻을 표시하고 계속해서 해결하기 바랍니다. 또한 여러분의 생각을 모두 문제지 에 기록하여주기 바랍니다. 틀려도 상관없습니다.
3) 문제해결과정에서 힌트를 요구하지 말고 마지막 해를 분명히 대답해 주기 바랍니다.
4) 본 검사의 문항 수는 13문항이고, 시간은 50분입니다.

한국교원대학교 대학원 수학교육과

본 검사를 실시하여 주셔서 대단히 감사합니다.

(　　)고등학교 (　)학년 (　)반 (　)번 이름(　　)

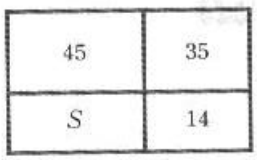
1. 다음 방정식을 만족하는 x 의 범위를 구하여라.

(1) $\{x\}^2 - 3\{x\} + 2 = 0$ (단, $n - \frac{1}{2} \leqq x < n + \frac{1}{2}$ 일 때 $\{x\} = n$)

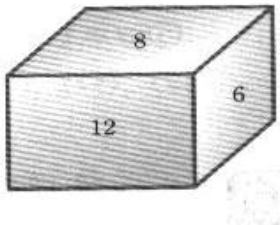
2. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k - a)x + k^2 + a^2 - b + 1 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b 의 값을 구하여라.

3. $y = x^2 + (m + 1)x + 2m - 1$ 이 x 축과 접하도록 m 의 값을 구하여라.

4. 오른쪽 그림과 같이 하나의 직사각형을 네 개의 직사각형으로 나누었더니, 세 직사각형의 넓이가 각각 $45, 35, 14$가 되었다. S 의 넓이를 구하여라



5. 넓이가 각각 $6cm^2, 8cm^2, 12cm^2$ 인 직사각형모양의 종이 두 개씩을 가지고, 그림과 같은 직육면체모양의 상자를 만들 수 있었다. 이 상자의 부피를 구하여라



6. 어떤 직사각형의 둘레의 길이는 $2a$, 대각선의 길이는 b, 넓이는 c 일 때 이 직사각형의 가로, 세로를 두 근으로 하는 이차방정식은?

7. 이차방정식 $3x^2 - 4x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 만들어라.

8. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때 $\alpha+\beta = 1$을 만족한다. 방정식 $f(2x - 1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

9. 이차부등식 $x^2 + 2x - 15 \geqq 0$을 풀어라.

10. 세 변의 길이가 x, $x + 1$, $x + 2$ 인 삼각형이 있다. 이 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 x 의 정수 값을 구하여라.

11. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(a^2 - 1)x^2 + (a - 1)x + 1 > 0$ 이 성립할 때, 실수 a 의 범위를 구하여라.

12. 부등식 $(a + 2)x^2 + 2x + a \leqq 0$ 이 x 의 모든 실수에 대하여 성립하도록 a 의 범위를 구하여라.

13. x 에 대한 이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $-1 < x < 2$ 일 때, 부등식 $f(-x + 1999) < 0$ 의 해집합을 구하여라.

교정검사지(부록 B)

1. 다음 부등식을 만족하는 x 의 범위를 구하여라.

   $2[x]^2 - 9[x] + 4 < 0$ (단, 정수 n 에 대하여 $n \leqq x < n+1$ 일 때, $[x] = n$)

2. x 에 대한 이차식 $x^2 + 2ax + (ka - 2k + b)$ 가 k 의 값에 관계없이 완전제곱식이 되도록 a, b 의 값을 구하여라.

3. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 4 일 때, 방정식 $f(-x+2) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

4. 세 변의 길이가 2, 3, x 인 삼각형이 있다. 이 삼각형이 예각삼각형이 되도록 x 의 값의 범위를 구하여라.

5. $(a-1)x^2 - 2(a-1)x$ 가 x 의 모든 실수 값에 대하여 -1보다 클 때, 실수 a 의 범위를 구하여라.

검사 설명서(부록 C)

1) 본 검사는 학생들의 문제해결 능력을 파악하여 학습 지도에 활용하기 위하여 실시합니다. 부담 없이 문제를 해결하여 주기 바랍니다.

2) 문제해결과정에서 학생들 자신의 생각을 말로 하면서 해결하여 주기 바랍니다. 학생들은 각 문제를 해결하기 직전에 어떤 방법으로 문제를 해결할 것인지 표현하여 주기 바랍니다.

3) 연습지 없이 직접 해결합니다. 만일 오류가 발생되었을 때는 두 줄로 긋고 계속해서 해결합니다. 문제지가 더 필요하면 요구하여도 됩니다.

4) 해결과정에서 선생님이 질의를 하면 사고하고 있는 그대로를 대답해주기 바랍니다.

5) 문제해결 과정에서 힌트를 요구하지 말고 마지막 해를 분명히 대답해주기 바랍니다.

6) 모든 검사가 끝났을 때, 다른 학생들에게 문제를 설명해서는 안됩니다.

본 검사를 실시하여 주셔서 대단히 감사합니다.

연구자의 면담자료 (부록 D)

⊙ 문제 의식

1) 검사 설명서를 읽었는가?

2) 문제를 읽고 풀이를 구상하여보아라.

3) 문제를 이해하는가?

4) 문제를 풀 수 있겠는가?

⊙ 문제 이해

5) 구하고자하는 것은 무엇인가?

6) 중요한 자료와 조건은 무엇인가?

7) 조건은 만족될 수 있는가?(잠정적인 답이나 추측을 기대하는 경우)

8) 조건은 미지의 것을 결정하기에 충분한가, 또는 불충분한가, 또는 과다한가, 또는 모순되는가?

9) 그림을 그려보아라. 적절한 기호를 붙여라

10) 조건을 여러 부분으로 분해하라. 그것을 써서 나타낼 수 있는가?

11) 다르게 표현할 수 있는가?

12) 관련된 수학적 정의나 정리를 이해하는가?

13) 네가 이해한 대로 자신의 말을 사용하여 문제를 진술하여 보아라.

⊙ 계획 수립

14) 관련이 있는 문제나 유사한 문제를 접해본 일이 있는가?

15) 관련된 문제를 알고 있는가? 유용하게 쓰일 수 있을 듯한 어떤 정리를 알고 있는가?

16) 미지인 것을 살펴보아라! 친숙한 문제 중 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라.

17) 관련된 문제로 전에 풀어 본 일이 있는 문제가 있다면 그것을 활용할 수 있

을까? 그 결과를 활용할 수 있을까? 그 방법을 활용할 수 있을까? 어떤 보조 요소를 도입하면 그것을 활용할 수 있을까?

18) 다른 관점이나 표현은? 문제를 달리 진술할 수 있을까? 좀더 다르게 진술할 수 있을까? 정의로 되돌아가 보자.

19) 제일 먼저 해야할 일이 무엇인가?

20) 만일 제기된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어 보아라. 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 있는가? 보다 일반적인 문제는? 보다 특수한 문제는? 유사한 문제는? 문제를 부분적으로 풀 수 있는가? 조건 가운데 일부분만 남기고 다른 것은 버려보아라. 그랬을 때 미지인 것은 어느 정도까지 정해지는가? 자료로부터 무언가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까? 미지인 것을 결정하는 데 적절한 다른 자료를 생각해 볼 수 있을까? 새로운 미지인 것과 새로운 자료가 서로 보다 더 가깝게 되도록 하기 위해서 미지인 것이나 자료 또는 필요하다면 두 가지 다 변형할 수 있을까? 변형하고 일반화하면?

21) 자료는 모두 사용했는가? 조건을 모두 사용했는가? 문제에 포함된 핵심적인 개념은 모두 고려했는가?

22) 적절한 자료를 선정하여라. 필요하다면 새로운 자료를 만들어라.

23) 어떤 방법으로 풀겠는가?

24) 계획이 옳은가?

⊙ 계획 실행

25) 자료와 미지의 것 사이의 관련성을 찾아보아라.

26) 자료조작을 위한 알고리즘을 구성하여라.

27) 풀이계획을 실행하고 매 단계를 점검하여라.

28) 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가?

29) 그것이 옳다는 것을 증명할 수 있는가?

30) 그렇게 하는 이유는?

31) 무엇을 하고 있는가?

32) 다른 방법으로 생각해 보았는가?

33) 그것이 뜻하는 것이 무엇인가?

34) 처음 주어진 정보에서 새로 출발하여보아라.

35) 그 문제를 푸는 방법은 단 한 가지인가?

36) 왜 옳지 않다고 생각하는가?

37) 결과가 옳은가?

38) 맞는다고 확신하는가?

⊙ 반 성

39) 결과를 점검할 수 있는가?

40) 자료의 활용은 적절하였는가?

41) 주어진 조건에 맞는가?

42) 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? 그것을 한 눈에 알 수 있는가?

43) 다른 풀이 방법은 없는가?

44) 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?

45) 유사한 문제를 만들어 보자.

쓰여진 약정(부록E)

⊙ D고교 37번 학생의 쓰여진 약정(Written protocol)

문 제 해 결 지	
성 명 :	날 자 (1999. .)

1. 다음 부등식을 만족하는 x 의 범위를 구하여라.

$2[x]^2-9[x]+4<0$.

(단, 정수n에 대하여 $n \leqq x < n+1$ 일 때 $[x]=n$)

$[1.4] = 1$

$n \leqq 1.4 < n+1$

$[0.4] = 0$

$[-1.4] = -2$

$[x] = A$

$2A^2 - 9A + 4 < 0$

$\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{matrix}$

$(2A-1)(A-4) < 0$

$\frac{1}{2} < A < 4$

$\frac{1}{2} < [x] < 4$

$[x] = 1$ or 2 or 3.

① $[x] = 1$

$1 \leqq x < 2$

② $[x] = 2$

$2 \leqq x < 3$

③ $[x] = 3$

$3 \leqq x < 4$

$1 \leqq x < 4$

문 제 해 결 지

성 명 :	날 자 (1999. .)

2. x 에 대한 이차식 $x^2+2ax+(ka-2k+b)$ 가 k 의 값에 관계없이 완전제곱식이 되도록 a, b 의 값을 구하여라.

$D = b^2 - 4ac$.

$\frac{D}{4} = b'^2 - ac$

~~$\frac{D}{4} = a^2 - (1)(1)(ka-2k+b)$~~

$\frac{D}{4} = a^2 - 1(ka-2k+b) = 0$.

$= a^2 - ka + 2k - b = 0$.

$-ka+2k = -a^2+b$.

~~$-k+2k = \frac{-a^2+b}{a}$.~~

$k(-a+2) = -a^2+b$.

$k(-a+2) = -a^2+b+0k$

$-a+2 = 0 \qquad a = 2$

$-a^2+b = 0$

~~$4+b=0$~~

~~$b=-b$~~

$-4+b=0$

$b = 4$

⊙ D고교 24번 **학생의 쓰여진약정**(Written protocol)

문 제 해 결 지

성 명 :	날 자 (1999. .)

4. 세 변의 길이가 2, 3, x 인 삼각형이 있다. 이 삼각형이 예각삼각형이 되도록 x 의 값의 범위를 구하여라.

i) x가 제일 클 때 $x < 2+3$ $x<5$

삼각형의 조건

피타고라스의 정리

$x^2 > 2^2+3^2$ (4)   ~~…~~   ~~…~~ $x^2>13$ ~~…~~

x의 범위 $-\sqrt{13} > x$ or $x > \sqrt{13}$ ~~$-\sqrt{13}>x$~~ → 음수일 수 없으므로

$\sqrt{13} < x < 5$

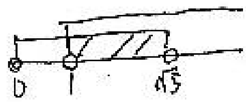
ii) 3이 제일 클 경우

$2+x > 3$ $x>1$ → 삼각형의 조건

$3^2 > 2^2 + x^2$ $9 > 4+x^2$ $x^2<5$.

$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ 하지만 x는 0보다 커야하므로   ⇒ 피타고라스의 정리

$0<x<\sqrt{5}$:



$1<x<\sqrt{5}$

∴ 답: $1<x<\sqrt{5}$ or $\sqrt{13}<x<5$

성 명 :	날 자 (1999. .)

4. 세 변의 길이가 2, 3, x 인 삼각형이 있다. 이 삼각형이 예각삼각형이 되도록 x 의 값의 범위를 구하여라.

$2+3>x$ $\quad 5>x$ $\quad x<5$ $\quad x>0$

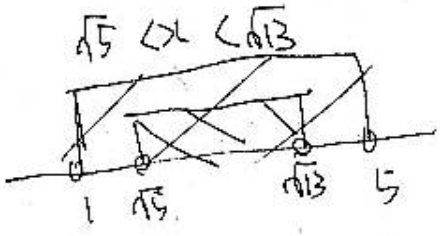
$3+x>2$ $\quad x>-1$

$2+x>3$ $\quad x>1$ $\quad 1<x<5$

$x^2<2^2+3^2$ $\quad x^2<13$ $\quad = -\sqrt{13}<x<\sqrt{13}$ $\quad 0<x<\sqrt{13}$

$2^2<x^2+3^2$ $\quad 4<x^2+9$ $\quad -5<x^2$ $\quad x>0$ X

$3^2<x^2+2^2$ $\quad 9<x^2+4$ $\quad 5<x^2$ $\quad x<-\sqrt{5}$ or $x>\sqrt{5}$



답: $\sqrt{5}<x<\sqrt{13}$

문 제 해 결 지

성 명 :	날 자 (1999. .)

4. 세 변의 길이가 2, 3, x 인 삼각형이 있다. 이 삼각형이 예각삼각형이 되도록 x 의 값의 범위를 구하여라.

i) x가 제일 클 경우

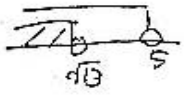
① 삼각형의 조건 $x < 2+3$ $x<5$

② 피타고라스의 정리

$x^2 < x^2+3^2$ → $x^2<13$ $-\sqrt{13}<x<\sqrt{13}$

(예각 피타고라스의 정리)

x는 변의 길이므로 $x>0$ $0<x<\sqrt{13}$



$0<x<\sqrt{13}$

ii) 3이 제일 클 경우

① 삼각형의 조건 $3<2+x$ $x>1$

② 피타고라스의 정리

$3^2<2^2+x^2$ $9<4+x^2$ $x^2>5$ $x<-\sqrt{5}$ 또는 $x>\sqrt{5}$

$x>0$ 이므로 ~~$0<x<\sqrt{5}$~~ $x>\sqrt{5}$

~~$1<x<\sqrt{5}$~~ $x>\sqrt{5}$

답 : $\sqrt{5}<x<\sqrt{13}$

문 제 해 결 지

성 명 :	날 자 (1999. . .)

5. $(a-1)x^2-2(a-1)x$ 가 x 의 모든 실수 값에 대하여 -1보다 클 때, 실수 a 의 범위를 구하여라.

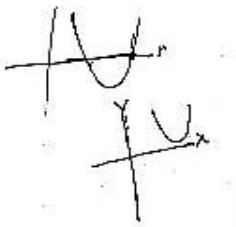
$(a-1)x^2-2(a-1)x \geq -1$

$(a-1)x^2-2(a-1)x+1 > 0$

$Ax^2-2Ax+1>0$

~~$(-2A)^2-4A>0$ — 판별식~~

~~$(-A)^2-A>0$ — 작수판별식~~



$b^2-4ac>0$

$a-1>0 \qquad a>1$

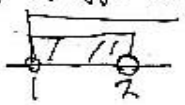
작수판별식 $\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(a-1)<0$

$\Rightarrow (a-1)^2-(a-1)<0$

$\Rightarrow a^2-2a+1-a+1<0$

$\Rightarrow a^2-3a+2<0$

$\Rightarrow (a-1)(a-2)<0$



$1<a<2$

$1 \leq a<2$

⊙ D고교 15번 학생의 쓰여진약정(Written protocol)

문 제 해 결 지	
성 명 :	날 자 (1999. .)

2. x 에 대한 이차식 $x^2+2ax+(ka-2k+b)$ 가 k 의 값에 관계없이 완전제곱식이 되도록 a, b 의 값을 구하여라.

$(x+a)^2-a^2+ka-2k+b=$

$\underbrace{k(a-2)}_{=0}\cdot\underbrace{-a^2+b}_{=0}=$

$a=2$ $\quad -4+b=0$

$b=4$

D/4 $\quad a^2-(ka-2k+b)=0.$

$a^2-ka+2k\cancel{+}-b=0$

$\underbrace{k(-a+2)}_{=0}+\underbrace{a^2\cancel{+}-b}_{=0}=0.$

$k(-a+2)=0$

$a=2.$

$\cancel{a^2+b}=$ $\quad \overset{4-b}{\cancel{4+b}}=0$

$a^2-b=$ $\quad b=+4.$

문 제 해 결 지	
성 명 :	날 자 (1999. .)

3. 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 합이 4일 때, 방정식 $f(-x+2)=0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

$f(x) = ax^2+bx+c = 0.$

$-\frac{b}{a}$ = 두근의 합

$-\frac{b}{a} = 4.$

$-b = 4a.$

$a(-x+2)^2 + b(-x+2) + c = 0.$

$a(x^2-4x+4) - bx+2b+c = 0.$

$ax^2-4ax+4a-bx+2b+c=0.$

$ax^2-(4a+b)x+4a+2b+c=0.$

$+\frac{(4a+b)}{a}$ = 두근의 합.

$b=-4a.$

$\frac{4a-4a}{a} = 0.$

문 제 해 결 지

성 명 :	날 자 (1999. .)

두근이 α, β

$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) = 0$.

$\alpha+\beta = 4$

~~$a(-x+2\alpha$~~.

$f(-x+2) = a(-x+2-\alpha)(-x+2-\beta) = 0$.

$-x+2-\alpha = 0$. $\quad x = 2-\alpha$.

$-x+2-\beta = 0$. $\quad x = 2-\beta$.

$2-\alpha+2-\beta =$

~~$x = 2$~~.

~~$-2+2-2=0$~~.

~~$-2\alpha+2=0$~~.

~~$2=1$~~.

$2-\alpha+2-\beta = 4-(\alpha+\beta)$

4

$= 0$.

감사의 글

이 한편의 논문이 완성되기까지 많은 분들의 도움이 있었습니다.
바쁘신 가운데서 많은 격려와 조언을 아끼지 않으시고, 언제나 자상하게 이끌어주신 조민식 지도교수님께 깊이 감사드립니다.

그리고 바쁘신 와중에도 논문을 지도해 주신 김원경 교수님과 전평국 교수님께 감사를 드립니다.

열성적으로 학문의 길을 걷고 계시고, 제자들에게 많은 관심과 사랑을 주시는 박배훈 교수님, 신현용 교수님, 이재학 교수님, 류희찬 교수님, 신인선 교수님, 이기석 교수님의 훌륭한 가르침에 깊이 감사드립니다.

또한 저에게 학문의 기회를 주신 인천 대건 고등학교 교장선생님과 교감선생님 및 동료 선생님들과 검사지의 검사를 위해 협조해주신 여러 선생님, 대학원 생활 동안 어려움과 기쁨을 함께 하며 서로에게 용기가 되었던 한국교원대학교 대학원 선생님들께 감사의 마음을 전합니다.

끝으로 오늘이 있기까지 지극한 사랑과 희생으로 보살펴 주신 부모님과 형제자매, 장인, 장모님, 항상 곁에서 이해하며 도와준 사랑하는 아내 그리고 저를 아는 모든 분들과 기쁨을 함께 나누고 싶습니다.

2000년 2월
우 현 철 올림