석사학위논문

이차방정식과 부등식 문제해결과정에서 나타나는 오류원인분석과 교정에 관한 연구

한국교원대학교 교육 대학원

수 학 교 육 과 수 학 교 육 전 공

우 현 철

2000 년 2 월

이차방정식과 부등식 문제해결과정에서 나타나는 오류원인분석과 교정에 관한 연구

지도교수 조 민 식

이 논문을 교육학 석사학위 논문으로 제출함

한국교원대학교 교육 대학원

수 학 교 육 과 수 학 교 육 전 공

우 현 철

2000 년 2 월

우현철의
교육학 석사학위 논문을 인준함

심사위원장 _____ 인

심사위원 _____ 인

심사위원 _____ 인

한국교원대학교 교육 대학원

2000 년 2 월

<제목차례>

<표차례>

<프로토콜차례>

국문요약

이차방정식과 부등식 문제해결과정에서 나타나는 오류원인분석과 교정에 관한 연구

우현철

한국교원대학교 교육 대학원 수학교육과 수학교육전공
(지도교수 : 조민식)

본 연구의 목적은 이차방정식과 부등식 문제해결에 대한 고등학교 학생들의 오류의 유형과 원인을 분석해보고 그 교정과정을 밝힘으로써 문제해결 능력을 향상시키기 위한 연구의 기초 자료를 제공하고자 하였다.

이러한 연구 목적을 달성하기 위하여 본 연구에서 설정한 구체적인 연구문제는 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 유형을 설정해서 분류하고, 오류의 원인을 찾아보고, 오류의 교정 과정을 밝혀내려는 것이었다.

연구문제 1, 2를 해결하기 위하여 인천광역시에 소재 하고있는 인문계 고등학교 중에서 학력수준이 중위권인 D, Y, S 3개 고등학교에서 1학년 학생 132명을 선정하였으며, 연구문제 3을 해결하기 위하여 D고등학교 1학년 학생 3명을 연구대상으로 선정하였다. 연구문제 1, 2를 위한 오류 검사지는 이차 방정식과 부등식에 관한 문항 총 13개로 구성하였으며, 연구문제 3을 위한 교정 검사지 문항은 오류 검사지의 문항과 비슷한 유형의 문항으로 5개를 작성하여 D고교 학생 3명에게 각각 2문항씩을 제시하고 면담을 실시하였으며, 이들의 쓰여진 약정(Written protocol)과 언어 약정(Verbal protocol)을 분석하여 조사하였다.

본 연구의 결과로부터 얻어진 결론은 다음과 같다.

첫째, 학생들이 흔히 범하는 오류의 유형은 전략선택의 오류(41.46%), 이해의 오류(23.93%), 처리기술의 오류(19.96%), 애매 모호한 오류(8.41%), 반성의 미 실행에 의한 오류(6.24%)의 순서로 나타났다. 오류의 발생빈도를 보면 3학교 모두에서 전략선택의 오류가 가장 많이 발생했다는 것을 알 수 있다. 이것은 학생들이 수학적 정리나 정의를 이해하는 데에 문제가 있다는 것을 나타내는 것이며, 또한 학생들이 문제풀이의 경험이 없다는 것을 드러내는 것이다.

둘째, 학생들이 흔히 범하는 오류의 원인을 살펴보면 다음과 같다.

① 정리나 정의를 확실히 이해하지 못하거나 또는 알고 있으면서도 활용할 수 있는 능력이 부족하다.

② 전에 풀어본 문제와 연관짓기를 못하거나 문제를 다르게 진술하지 못하는 경우가

많다.

③ 문제에 포함된 핵심적 개념을 잃어버리거나 고려하지 못하는 경우가 많다.

④ 문제의 조건으로 주어진 자료를 무시하거나 혹은 잘못 사용하는 경우가 많다.

⑤ 문제풀이에 필요한 정보를 찾아내기 위해 조건을 여러 부분으로 분해하지 못하는 경우가 많다.

⑥ 문제를 풀기 위해 다른 형태로 번역하는 과정에서 많은 실수를 한다.

⑦ 너무나 잘 알고 있으리라 믿었던 계산상의 오류경향도 많았다.

⑧ 아무런 근거 없이 논리적으로 부적절한 확대 해석을 한다.

셋째, 면담을 통하여 학생들의 오류 교정 과정을 살펴본 결과 Polya가 제시한 문제해결을 위한 4단계전략(문제의 이해, 해결계획 수립, 계획의 실행, 반성)을 구체적인 문제상황에 적용할 수 있는 세부전략으로 좀더 상세히 하여 학생들에게 각 전략의 명칭을 주지시킨다. 이렇게 하여 학생들로 하여금 각 전략에 대한 명칭의 언급이나 연상만으로도 그 전략을 사용할 수 있도록 전략자체를 직접 가르침으로써 문제해결을 하나의 학습법으로 가르친다면 오류를 훨씬 더 많이 줄일 수 있으리라고 생각한다.

아울러 오류의 유형을 줄일 수 있는 방법을 다음과 같이 제안한다.

1) 이해의 오류의 경우 : 학생들은 주어진 문제를 접했을 때 문제 제기를 함으로써 관련된 내용으로부터 과거와는 전혀 다른 새로운 관점을 얻을 수 있으며, 그 내용으로부터 새로운 아이디어를 생각할 수 있게되고, 수학에 보다 친근함을 느끼게 되며, 수학에 대한 자신감을 가질 수 있게되어 이러한 경험을 바탕으로 하여 다른 문제가 주어졌을 때 그 문제에 대한 이해를 높일 수 있고 나아가 이해의 오류를 줄일 수 있으리라고 생각한다. 따라서 문제를 해결하기 위한 수단으로 문제 제기를 제안한다.

2) 전략선택의 오류의 경우 : 문제해결 능력의 발달은 자기가 푸는 문제에 주의를 집중하고 반성하는 데에 의존하며, 일반적인 문제를 설정하여 그것을 풀어보는 것은 문제해결 능력의 개발에 도움이 된다고 생각한다. 따라서 문제를 해결할 때 반성의 단계를 활용하여 문제상황을 개발하고 탐구하도록 하며, 문제를 확장하여 일반화하도록 하며, 해를 일반화하도록 하며, 문제 풀이 과정을 일반화하도록 하며, 자기 반성 태도를 개발하도록 할 것을 제안한다.

3) 처리기술의 오류의 경우 : 흔히 수학 문제에서는 연산 및 조작이 문제를 해결하는 결정적인 단서가 되기도 한다. 따라서 문제를 파악할 때 문제의 주된 구성요소로 그 문제를 해결하기 위한 연산 및 조작에는 무엇이 있는지를 파악하게 함으로써 문제를 어떻게 풀어야 할지를 생각하도록 하고, 또한 학생이 몇 줄이나 되는 긴 계산을 했을 때 마지막 줄을 보면 계산이 틀린 것을 알게되지만 교사는 곧바로 틀렸다고 말하는 것을 삼가 하고 그 학생과 한 줄 한 줄씩 검토하면서 계산의 오류를 학생 스스로 발견하게 하여야 한다. 그 과정에서 그는 어떤 것을 배우게 된다. 따라서 억지로 강요하지 말고 제안함으로서 학생 스스로 오류를 발견하여 이를 수정하도록 하는 방법을 제안하고 싶다.

* 본 논문은 2000년 2월 한국교원대학교 대학원 위원회에 제출된 교육학 석사학위 논문임

Ⅰ. 서론

A. 연구의 필요성 및 목적

수학교육의 목적은 수학적으로 사고하는 능력을 개발하는 것이라고 말할 수 있다. 수학적으로 사고하는 능력이란 무엇인가?

중등학교 수학교육과정을 보면 수학과의 목표가 기본적인 수학적 지식과 기능을 바탕으로 수학적 사고력을 길러 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기른다는 것으로 되어 있다. 이는 다음과 같은 네 가지 요소로 좀 더 상세히 분류될 것으로 생각된다.

① 여러 가지 기본적인 계산 능력을 포함한 문제해결 절차, 곧 알고리즘의 구사능력

② 기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성의 이해력과 이에 수반되는 수학적인 용어, 기호, 그래프등 수학적 표현의 구사력

③ 수학적인 추론능력, 곧 추측하고 발견하는 능력과 증명하는 능력

④ 수학 내적인 문제의 해결과 응용 문제의 해결 능력

학교 수학은 수많은 계산 방법으로 가득 차 있다. 수학은 넓은 의미에서 계산학 이라고 볼 수도 있을 것이다. 그러한 여러 가지 계산 방법, 나아가 문제를 해결하는 명확한 절차를 알고리즘이라고 한다. 기본적인 정수의 계산 방법을 모른다면 얼마나 불편하겠는가? 계산 방법이 얼마나 강력한 문제해결 수단이 되는지는 재언을 요하지 않는다.[1)]

한편, 방정식과 부등식은 수학교육에서 아주 중요한 개념이다. 방정식과 부등식의 개념은 수학과 함께 발전해 왔으며, 현재는 특히 초등의 산술, 중등의 대수 등이 방정식과 부등식에 그 기초를 두고 있다. 방정식과 부등식은 계산법이

1) 서울대학교 사범대학 수학교육과, 1995년도 중등 1, 2급 정교사 자격연수 교재, pp.87 88.

나 공식으로 가득 차 있다. 계산법을 다루는 것은 자신감을 증대시키고 개념적 사고를 보다 깊이 있게 할 수 있도록 하는 바탕을 마련한다는 점에서 매우 중요한 사항이다. 그리고 기본적인 계산이 수학적인 힘의 바탕이 되려면 단순히 기계적인 것이 되어서는 안되며, 그 원리에 대한 충분한 이해와 그것을 전제로 한 문제 해결에서의 적용능력이 필요한 것이다.

Clayton(1990) 등은 유능하고 성공적인 수학 교사가 되기 위해서는 학생들의 특성과 가르쳐야 할 수학의 구조를 알아야 할뿐만 아니라 학생들의 오류를 진단하기 위한 전략에 대한 지식을 갖추어야 한다고 말하고 있다. 따라서 학교현장의 수학 교사들은 학생들의 오류를 파악할 필요가 있으며, 이는 다음과 같은 긍정적인 결과를 가져온다고 볼 수 있다. ① 학생들의 오류의 원천과 형태를 파악하고 각각의 오류에 대하여 학생들에게 좀 더 정확한 피드백을 가져다 줄 수 있다. ② 오류 유형은 종종 내재하는 수학적 개념의 잘못된 이해, 문제해결 전략의 부족이나 미성숙한 문제 풀이전략을 드러나게 한다. ③ 오류 유형에서 드러난 학생들의 사고 과정의 결함은 교사가 교수 계획을 수립하는 데에 참고가 된다.

그러나 현재의 수업현장에서는 수학적 지식의 습득을 강요하는 수업으로 일관하여 재래의 주입식 학습에 익숙해 있는 실정으로, 학교현장에서는 문제풀이의 결과에 비중을 둘 뿐 문제풀이의 과정에서 학습자가 어떻게·왜 오류를 범하고 있는지, 그리고 주어진 학습과제에서 어떠한 오류의 유형이 학습자들에게 가장 취약한지, 또 이미 발생한 오류를 어떻게 치료할 것인지 등에 관해서는 무관심하다.

그런데 수학 문제 해결 과정중 학생들이 범하는 오류는 무작위로 아무렇게나 행하여지는 것이 아니라 그들이 믿고있는 의미 있는 체계적 관계 속에서 오류가 진행되고 있는 바 이러한 오류는 학습자로 하여금 문제 해결을 저해시키는 것은 물론 잘못된 개념의 획득을 가져오게 한다.

학습하는 과정에서 발생하는 오류는 학습의 실패원인에 대한 가치 있는 정보

를 제공하고 그 대안을 제시한다는 점을 고려해 볼 때 효과적인 수학교육을 위해서는 문제의 결과보다는 문제를 풀어나가는 과정에서 발생하는 오류현상에 보다 관심을 두어 그 인지적 원인을 파악하고 수정해 나가는 노력이 이루어져야 한다. 따라서 문제 풀이 과정에서 나타나는 오류유형에 대한 분류와 오류의 원인 규명 및 오류의 교정과정을 밝혀내는 것은 수학 교사들의 효과적인 학습 지도에 도움이 될 것이다. 이러한 관점에서 본 연구는 구체적으로 다음과 같은 연구목적에 대한 답을 찾고자 하였다.

B. 연구문제

문제1. 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 유형을 설정해서 분류할 수 있는가?

문제2. 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 원인을 찾아볼 수 있는가?

문제3. 이차방정식과 부등식 문제 해결 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류의 교정 과정을 밝혀낼 수 있는가?

C. 용어의 정의

1. 오류(error)

오류의 정의를「 우리말 큰사전 」에서 찾아보면 '그릇되어 이치에 틀림', '바르지 못한 논리적 과정 및 그 결과로 생긴 추리나 판단' 등으로 되어있고,「 교육학 용어사전 」에서는 '논리학에 있어서 바르지 못한 논리적 과정, 특히 외견상 바르게 보이면서 틀린 추리, 통속적의미로는 참이 아닌 것으로 쓰이기

도 하며, 착각·관측상의 오차 등으로 인한 지각상(知覺上)의 착오를 가리키기도 함' 등으로 풀이하고 있다. 또한 '논리학에 있어서의 오류는 크게 나누어 연역적 추리에 관한 것과 귀납적 추리에 관한 것이 있으며, 각각은 다시 여러 가지 형태의 오류로 나누어진다. 연역적 추리에 관한 오류는 다음 세 가지 범주로 분류된다. ① 논리적 추리의 형식을 지키지 않음으로써 생기는 형식적 또는 순논리적 오류, ② 언어의 부정확한 사용이나 의미의 애매성에 기인하는 언어적 또는 반 논리적 오류, ③ 전제가 애매하다든가 증명해야 할 것을 가정한다든가 하는, 사고의 대상인 자료로부터 생기는 자료적 오류 등이 그것이다. 귀납적 추리에 관한 오류는 경험적 사실을 충분히 관찰하지 못한 상태에서 선입견이나 필요한 사실의 간과 등으로 인해 생기는 것으로서 조급한 개괄의 오류, 인과관계에 관한 오류 등이 있다'고 설명하고 있다.

본 연구에서 말하는 오류는 이차방정식과 부등식에 관한 문제풀이과정에서 나타나는 수학적 오류 즉, '수학의 개념상 바르지 못한 논리과정'만을 의미하는 것으로서 다음의 세 가지 형태를 말한다.

① 부주의로 인한 오류 : 문제 풀이에 몰두하지 않음으로 인한 잘못된 반응
② 과정상의 오류 : 잘못된 순서나 부적절한 과정으로 인하여 틀린 답을 냄
③ 개념적인 오류 : 개념이나 원리를 모르거나 잘못 이해한 경우

D. 연구의 제한점

본 연구는 고등학교 공통수학교과의 이차방정식과 부등식 문제 풀이 과정에서 학생들이 범하게 되는 오류와 그 원인을 조사해 보고 오류의 교정과정을 밝혀보고자 하였다. 그러나 연구의 제한점이 있는 바 이는 다음과 같다.

첫째, 본 연구의 대상은 인천광역시에 소재하고 있는 학력수준이 중위권인 인문계고등학교 중 3개 학교 1학년 학생으로 한정한다.

둘째, 본 연구는 오류 검사지에 나타난 오류만을 분석 연구한다.

셋째, 본 연구는 학생들의 이차방정식과 부등식에 관한 문제 풀이 과정을 통해 학생들이 범하게되는 오류의 교정과정을 밝히고자, 면담을 통하여 개별 지도 과정을 기술하고자 하였으나 학생에 따라 개인차가 있을 수 있다.

E. 기대되는 효과

본 연구에서는 이차 방정식과 부등식 문제 풀이 과정에서 나타나는 학습자의 오류를 관찰·분석하여 학습의 실패원인에 대한 가치 있는 정보를 제공하고 나아가서 오류의 교정과정을 밝히고자하였다.

이에 따라 기대할 수 있는 효과는 다음과 같다.

첫째, 이차방정식과 부등식의 문제 풀이과정에서 학생들이 어떤 오류의 유형을 범하는가를 파악함으로써 이차방정식과 부등식을 지도할 때 참고가 될 수 있다.

둘째, 학생들이 범하는 오류의 유형을 알게 됨으로써 각각의 오류의 원천을 찾을 수 있으며, 이를 예방하거나 치료하는 수업을 전개할 수 있다.

셋째, 면담을 통하여 학생들이 오류를 교정해나가는 과정을 살펴봄으로써 이차방정식과 부등식에 대한 지도계획을 세우는데 도움이 될 것이다.

Ⅱ. 문헌검토

A. 방정식과 부등식

1. 대수의 역사적 발생[2)]

현대수학의 두드러진 특징은 수학의 대수화, 대수적 방법에 의한 수학의 연구이다. 그러나 대수가 무엇인지는 정의하기가 쉽지 않다. MacLane과 Birkhoff는 다음과 같이 기술하고 있다. "대수는 수의 합, 곱, 거듭제곱을 조작하는 기술로서 출발하였다. 이들 조작의 규칙은 모든 수에 대하여 성립하므로, 그러한 조작은 수를 나타내는 문자로 실행될 수 있다. 그리고 ··· 그러한 규칙은 ··· 전연 수가 아닌 것에 대해서조차도 적용되는 것 같다. 따라서, 대수적 체계란 ··· 덧셈과 곱셈과 같은 조작이 어떤 기본적인 규칙을 만족하기만 하면 그 기능이 작동되는 임의의 원소의 집합이다". 그러한 대수 체계의 성질을 연구하는 분야가 추상대수학인 바. Dieudonnè(1972)는 추상대수학의 발달의 역사적 배경을 기술하는 가운데, 체를 이루는 실수에 대한 완전한 산술을 하던 상황에서 허수에 대한 맹목적인 계산이 의미를 갖게 되면서 계산의 대상으로부터의 추상화가 일어나고, 변환의 계산을 다루게 되면서 군이나 환과 같은 부분 산술체계를 연구하게 되어 추상대수학이 발달하게 되었음을 지적하고 있다.

대수는 수학의 발생과 함께 시작되었다고 할 수 있다. 예를 들어 이집트의 수학자 Ahmes(? 1650? B. C.)는 파피루스에 일차방정식에 해당하는 기록을 남기고 있다.

19세기 독일의 수학자 Nesselmann은 아메스 시대부터 오늘날까지 3천년 이상에 걸친 대수의 발전 단계를 계산법과 방정식의 표현방법에 따라 언어적 대

2) 우정호, 학교수학의 교육적 기초(서울대학교 출판부, 1998), pp.225 229.

수, 생략적 대수, 기호적 대수의 3단계로 구분하였다. 언어적 대수의 단계는 기호가 전연 사용되지 않고 미지수나 계산의 전체적인 과정이 일상언어만으로 기술되었던 단계로 Diophantus 이전의 시기는 물론 아라비아 대수학도 여기에 속한다. 생략적 대수의 단계는 풀이 방법을 본질적으로 언어로 기술하지만 자주 반복되어 사용되는 개념이나 계산을 축약된 용어나 머리글자와 같은 생략기호를 사용하여 나타내는 단계이다. 예를 들어, 르네상스 시대에는 플러스(plus)를 p, 마이너스(minus)를 m으로 나타내기도 하였다. 문자를 사용하여 미지수를 나타낸 알렉산드리아 시대의 그리스 수학자 Diophantus의 Arithmetica와 17세기 중엽까지의 서구의 대수학은 대체로 여기에 속한다. 이러한 단계에서는 문제별로 그 특징에 따라 특이한 풀이방법이 구체적으로 기술되어 있을 뿐으로 그 타당성을 입증하는 일반적인 방법이 결여되어 이해하기 어려웠다. 기호적 대수의 단계는 모든 식이나 연산이 일상언어로부터 독립된 기호적 언어로 표현되는 단계로 Descartes이후의 수학은 대체로 이 단계에 속한다. 특히 16세기의 Viète가 문자를 사용하여 미지수는 물론 상수까지 나타냄으로써 기호적 대수의 발전에 결정적인 계기가 되었다. 3천년 이상에 걸친 대수의 역사 가운데 기호적 대수는 겨우 3백년을 점하고 있지만 그 기간 동안에 대수학은 크나큰 발전을 이룩하게 되었다. 기호적 대수의 특징은 문자를 사용하여 임의의 상수와 미지수를 나타냄으로써 문자식을 사용한다는 특징이 있는 바, 그 결과 수학적인 문제를 일반적이고 형식적인 방법으로 취급할 수 있게 되었고 해법을 공식화하고 그 원리와 방법의 타당성을 연역적 추론에 의해 처리할 수 있게 되었다. 이러한 기호 대수의 발달은 17세기 이후 변수 개념과 함수 개념의 발달에 결정적인 역할을 하였다. 현재와 같은 대수식의 표현은 17세기의 Descartes로부터 비롯된 것이다. Descartes는 ≪방법서설≫의 부록 가운데에서 기지의 량을 $a, b, c, \cdots$, 미지의 량을 $x, y, z, \cdots$로 나타낸 방정식에 대하여 기술하고 있다. 그 이후 미지수, 상수와 변수를 문자로 나타내고 대수 문제를 일반적인 문자식으로 나타내어 형식적인 조작이 가능하게 됨으로써 대수학

나아가 수학은 커다란 발전을 이룩하게 되었다.

기호적인 언어가 발달되면서 수학적인 대상이나 연산의 바탕에 있는 구체적인 의미가 상당히 사라졌으며 그 결과 적용 가능성이 방대하게 확장되었다. 언어적 대수와 생략적 대수는 기본적으로 계산 절차의 기술이었으나, Viète에 의한 응축된 기호법의 발명은 대수를 단순히 절차적 도구 이상으로 만들었다. 대수가 '일반화된 산술'의 범주를 넘어서게 된 것은 관심의 초점이 계산의 대상에서 계산 자체로 이동되면서부터이다. 변수가 나타내는 대수적 조작의 대상이 일반화되면서 변수의 형식적 조작 규칙이 중요시되게된 것이다. 그 결과 기호적 대수의 발달은 군, 환, 체 등과 같은 추상적인 구조 개념의 점진적인 발달을 가능하게 하였다. 추상적인 수학적 관념은 조작적인 과정으로 그리고 구조적인 대상으로 인식될 수 있다.

2. 확대체

먼저 계수가 정수인 일차방정식 $ax + b = 0 (a \neq 0)$ 을 생각하자, 그러면 이 방정식의 근은 $x = -\frac{b}{a}$ 가 되어 $a = 1$ 이 아닌 이상 $-\frac{b}{a}$ 는 항상 정수는 아니므로 근이 존재하는 범위와 계수가 존재하는 범위는 항상 같지 않다. 곧 계수가 정수인 일차방정식의 근의 존재 범위는 유리수이고, 계수가 유리수인 일차방정식의 근의 존재 범위는 유리수이다. 따라서, 정수계수인 일차방정식 $ax + b = 0 (a \neq 0)$ 을 풀기 위해서는 유리수체 Q 를 생각하여야만 한다.

다음에 $x^2 - 2 = 0$ 이라는 이차방정식을 생각해보자. 계수는 정수(따라서 유리수이기도 하다.)인데 유리수체 Q 안에서는 근을 찾을 수 없다. 그래서 Q 에 무리수 $\sqrt{2}$ 를 더 붙여 준다. 이것을 $\sqrt{2}$ 를 첨가(adjoin)한다고 말하고 Q 에 $\sqrt{2}$ 를 첨가한 것을 $Q(\sqrt{2})$ 라고 쓴다. $\sqrt{2}$ 를 첨가한 집합 $Q(\sqrt{2})$ 는 집합 Q 의 원소에 $\sqrt{2}$ 를 합한 집합을 생각하는 것이 아니고, Q 의 원소와 $\sqrt{2}$ 를

덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 사칙연산으로 결합해서 만든 수 전체로 이루어지는 집합을 말한다. 곧 $Q(\sqrt{2})$ 의 원소는 $\alpha+\sqrt{2}\beta\,(\alpha,\beta\in Q)$인 모양을 하고 있다. 이것을

$$Q(\sqrt{2})=\{\alpha+\sqrt{2}\beta \mid \alpha,\beta\in Q\}$$

로 나타낸다. 이 때 $Q(\sqrt{2})$ 가 사칙연산에 관하여 닫혀 있다는 것은 쉽게 알 수 있다.

3. 실수체

4차방정식 $(x^2-2)(x^2-3)=0$ 의 근을 모두 구하려고 할 때 앞에서 생각한 체 $Q(\sqrt{2})$ 로는 불충분하므로(이것은 $\sqrt{3}$ 이 $\alpha+\beta\sqrt{2}$ (단, $\alpha,\beta\in Q$)와 같은 모양으로 나타낼 수 없다는 사실에서 알 수 있다.) 다시 $\sqrt{3}$ 을 첨가한 체 $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 을 생각한다. $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 의 원소는 $\alpha+\sqrt{2}\beta+\sqrt{3}\gamma+\sqrt{6}\delta\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in Q)$의 모양을 하고 있으므로 $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 도 또 체가 됨을 쉽게 확인할 수 있다. $Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 은 Q 와 $Q(\sqrt{2})$ 의 확대체가 되어 있다.

일반적으로 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2-b=0\ (a>0,b>0)$의 근을 모두 구할 수 있는 유리수체 Q 의 확대체를 생각 할 수 있다. 그것은 $ax^2-b=0$에 대하여 $ax^2-b=0$ 의 한 근인 $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 를 Q 에 첨가한 확대체 $Q(\sqrt{\frac{b}{a}})$ 이다.

이와 같이 하여 만들어진 체를 Q 의 단순대수확대체(simple algebraic extension field)라고 부른다.

$$Q\subset Q(\sqrt{2})\subset Q(\sqrt{2},\sqrt{3})\subset Q(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})\subset\cdots\cdots\subset R$$

이 되어 있음은 분명하다.

이차방정식 $ax^2 - b = 0$ $(ab > 0)$ 를 생각하는 한, 위의 열의 마지막에 나타난 실수체 R 을 생각하면 a, b 가 어떤 수가되어도 반드시 $ax^2 - b = 0$ 의 근을 R 안에서 찾을 수가 있다. 그러면 $ab < 0$ 인 경우에는 어떻게 되는가를 생각해 보자.

4. 복소수 도입

실계수인 이차방정식이 실수의 범위에서 해를 갖지 못하는 것은 이미 320년경에 알콰리즈미(Alchwârizmi)의 대수학 책에 밝혀져 있었고 판별식이 음일 때 실근(실수해)이 없다는 사실이 발견되었다. 그러나 허수를 생각함으로써 복소수가 처음 등장한 것은 르네상스 시대이다.

그 때에는 형식적인 계산의 범위를 벗어나지 못했으나 복소수가 효력을 조금씩 나타내고 있었다. 18세기말에 복소수의 기하학적 표시의 실마리를 베셀(C. Wessel, 1745 1818)이 찾아내었고 19세기초에 아르간(J. R. Argand, 1763 1822)이 그와는 독립으로 같은 내용을 발표했으나 불행히도 많은 사람의 주의를 끌지는 못했다.

그 후로 같은 결과가 많은 사람에 의하여 반복되었다. 그러나 그 본질을 명확하게 파헤치고 복소수의 이론 체계를 만들어 낸 것은 가우스였다. 그는 1831년 괴팅겐(Göttingen)학술협회에서 체계가 거의 완성된 논문을 발표하였다.

5. 복소수체

이차방정식 $x^2 + 1 = 0$ 의 근에 대하여 생각해보자. 이 방정식의 근은 실수체 R 안에는 존재하지 않는다. 앞에서 생각한 것과 같이 Q 에 이 방정식의 한 근 i $(i^2 = -1)$ 를 첨가한 $Q(i)$ 를 생각한다. $Q(i) = \{\alpha + i\beta \mid \alpha, \beta \in Q\}$ 이고

$Q(i)$ 도 또 사칙연산에 관하여 닫혀 있다. 이를테면 $Q(i)$ 의 두 원소를 $\alpha+i\beta, \gamma+i\delta$ 라고 할 때

$$\frac{\alpha+i\beta}{\gamma+i\delta}=\frac{(\alpha+i\beta)(\gamma-i\delta)}{(\gamma+i\delta)(\gamma-i\delta)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+i(\beta\gamma-\delta\alpha)}{\gamma^2+\delta^2}$$

가 되므로 나눗셈에 관하여 닫혀 있음을 알 수 있다. $Q(i)$ 도 또 Q 의 단순 확대체가 되어 있다.

이차방정식 $x^2+2=0$ 의 근을 모두 구하기 위해서는 $Q(\sqrt{2}, i)$ 라는 확대체를 생각하지 않으면 안 된다.

유리수체 Q 에 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ···과 같이 차례로, 무리수를 첨가하여 실수체 R 에 도달하여 다시 실수체 R 에 i 를 첨가한 체, 복소수체 $C=\{\alpha+i\beta \mid \alpha, \beta \in R\}$ 를 생각함으로써 임의의 이차방정식, 더 나아가서 계수가 Q 의 원소, 또는 R 의 원수인 n차방정식의 근을 모두 구할 수 있다. $Z \subset Q \subset R \subset C$ 가 되어 있는 것은 분명하다.

일반적으로 계수가 C 의 원소인 n차방정식의 근은 모두 C 의 원소로서 존재한다고 알려져 있다. 곧, 계수가 복소수인 n차방정식의 근을 모두 구하기 위한 체로서는 복소수체 C 자신을 생각하면 충분하다.

6. 판별식

일반적으로 n차방정식

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

의 근을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 이라 할 때

$$D=\{\Pi_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\}^2$$

을 판별식이라 한다.

따라서, 이차방정식일 때 두 근을 α, β 라고 하면 $D = (\alpha - \beta)^2$ 이 된다. 여기에 근과 계수와의 관계 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ 를 대입하면 $D = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ $= \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$. 실계수일 때는 $a^2 > 0$ 이므로 $b^2 - 4ac$ 를 판별식으로 할 수 있다. 또 복소수일 때에도 위의 식이 판별식이 되나 이 때에는 실근, 허근의 판정을 할 수 없고 $D = 0$ 일 때 중근임을 알 수 있다.

7. 삼차방정식, 사차방정식

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ 를 생각해 보자. 먼저 $X = x + \frac{b}{3a}$ 라고 놓고 처음 방정식을

$$X^3 + 3pX + q = 0$$

으로 변형한다. 여기서

$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$$

이다. ω 를 1 의 세제곱근$(\omega \neq 1)$이라고 하면 $X^3 + 3pX + q = 0$ 의 근은

$$\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta},$$

$$\omega\sqrt[3]{\alpha} + \omega^2\sqrt[3]{\beta}, \quad \left(\alpha, \beta = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}\right)$$

$$\omega^2\sqrt[3]{\alpha} + \omega\sqrt[3]{\beta},$$

가 된다.

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 근은 여기에서 $\frac{b}{3a}$ 를 빼면 구할 수 있다. 이것을 탈타리아-카르다노(Tartaglia-Cardano)의 공식이라 부른다.

여기서 p 와 q 가 실수인 경우, $q^3 + 4p^3 < 0$ 일 때에는 공식에서 한 실근과

두 복소수근이 얻어진다. 한편 $q^3 + 4p^3 > 0$ 일 때는 근은 모두 실근이지만 카르다노의 공식을 사용하는 한, 복소수의 거듭제곱근을 계산해야 한다. 실근을 구하려는 데 복소수를 사용한다는 것은 바람직하지 못하다고 생각하고 실수 범위 안에서만 근을 구하려고 했으나 아무도 성공하지 못했다. 그 후 이러한 경우, 대수적 해법(사칙연산과 실수의 거듭제곱을 취하는 조작)으로는 풀 수 없다는 것이 증명되었다.

사차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a \neq 0)$ 인 경우는, $X = x + \frac{b}{4a}$ 로 놓고 처음 방정식을

$$X^4 + pX^2 + qX + r = 0$$

이라고 변형한다. 여기서

$$y^3 - py^2 - 4ry + (4pr - q^2) = 0$$

의 한 근을 y_0 라고 하면 X 는 두 이차방정식

$$X^2 \pm \sqrt{y_0 - p}\left(X - \frac{q}{2(y_0 - p)}\right) + \frac{y_0}{2} = 0$$

의 근이 된다.

이 공식은 페라리(Ferrari)의 공식이라고 부른다.

8. n차방정식

5차 또는 그 이상의 차수를 가진 방정식의 대수적 해법을 구하는 것은 르네상스이래 19세기초까지 큰 문제 중의 하나였다. 결국 아벨(N. H. Abel, 1802 1829)이 5차 이상의 방정식에는 대수적 해법이 존재하지 않는 것을 증명하여(1826년) 이 문제가 해결되었다.

갈로아(Z. Galois, 1811 1832)는 방정식이 대수적으로 풀어지기 위한 필요충분조건을 구했다(1832). 그것은 방정식의 근을 다른 근으로 옮기는 조작을 원소

로 하는 치환군이라고 하는 군의 구조를 생각한 것(정규부분군에 주목하는 것이지만)과 주어진 방정식의 계수에서 실수의 거듭제곱근을 취하는 조작과 사칙연산에 의하여 얻어진 것을 첨가하여 얻어진 확대체를 생각함으로써 구해진다. 지금 이것을 갈로아의 이론이라고 부르고 있다.

9. 아벨(N. H. Abel, 1802 1829)

아벨은 1802년 8월 5일에 노르웨이의 서남단에 있는 휜드에서 목사의 차남으로 태어났다. 중학 시절에 아벨은 수학 선생 홀름뵈(Holboe, 1795 1850)에게 배우고 이 때부터 수학에 눈을 뜨기 시작했다. 16세 때는 뉴우튼, 오일러(L. Euler, 1707 1783), 라그랑제(J. L. Lagrange, 1736 1813), 가우스 등 위대한 수학자의 책을 탐독하고 철저하게 소화를 시켰다. 그의 수학은 거의가 독학이었다.

아벨의 부친이 1820년에 사망했기 때문에 가정은 경제적으로 곤란한 상태에 있었다. 또 당시의 노르웨이는 덴마크와 같이 나폴레옹의 동맹국이 되어 영국과 스웨덴에 대항하여 싸우고 있었으므로 빈곤에 허덕이고 있었다.

그러나 아벨은 장학금이라도 받고 있었으므로 중학에서 크리스차니아(Christiania)대학까지의 과정을 밟을 수 있었고 수학을 계속 연구할 수 있었다.

대학에 들어가기 전에 5차방정식의 근을 대수적으로 푸는 방법을 생각하고 소론으로 정리했다. 이 근을 구하는 것은 당시 수학회의 현안이 되어 있었다. 우리들은 이미 중학교에서 미지수 x 에 관한 일차와 이차방정식의 해법을 배웠다. 이를테면 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근은 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 로 주어진다. 삼차, 사차방정식의 해법도 카르다노(G. Cardano, 1501 1576), 페라리(L. Ferrari, 1522 1565)에 의하여 사칙연산과 거듭제곱근만으로 주어졌다. 따라서 $n \geqq 1$ 일 때 n차방정식 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ ($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 은

복소수)에 대해서도 일반적으로 공식이 주어진다고 추론되는 것 같았다. 아벨의 이 소론은 코펜하겐(Copenhagen)의 학사원에 출판을 부탁했으나 교수 데겐으로부터의 회답은 아벨의 재능을 칭찬하고 "이와 같이 노력해서 공이 없는 문제에 몰두하지 말고 오히려 해석면에서나 응용면에서 중요한 타원함수를 연구하여 수학의 대양에서 마젤란(Magellan)해협을 발견하도록 힘써・・・"라는 충고를 받았다.

이 소론에는 착오가 있었다. 후에 5차 이상의 방정식인 경우에는 근의 공식이 존재할 수 없다는 것을 아벨과 갈로아(Z. Galois, 1811 1832)가 발견했다.

1824년 아벨은 이것을(5차인 경우) 정리하여 자비로 출판을 했으나 제목에 '대수적 해법'이라는 표현이 빠져 있었기 때문에 당시에 인정을 받지 못하고 크렐레(Crelle)지에 실은 후 수년이 지나서야 비로소 세상의 인정을 받게 되었다.

1825년에 아벨은 노르웨이 정부의 제 1회 외국 유학생으로 친구 네 사람과 함께 유학을 떠났다. 코펜하겐, 함부르크를 거쳐 베를린에 도착하여 크렐레(A. L. Crelle, 1780 1855)와 친교를 맺었고 수학 잡지 발행에 참가하여 많은 논문을 발표했다.

베를린을 떠난 후 남유럽을 여행하고 파리에 돌아왔다. 여기서 타원함수의 연구를 완성하고 타원함수의 역함수가 일가인 이중주기함수로 유도됨을 발견했다. 타원함수론은 19세기를 통하여 수학계의 큰 화제가 되어 있었다. 이 발견은 가우스, 아벨, 야코비의 세 사람이 독립하여 완성시킨 것으로 인정되고 있다.

1826년 10월 10일에 '파리의 논문'이라고 불리고 있는 「어떤 종류의 확장된 초월함수의 일반적 성질에 관한 논문」을 파리 과학 학사원에 제출했다. 그러나 대 논문이었음에도 불구하고 코오시의 실수로, 발표된 것은 1841년이 되어서였다. 파리에서는 르쟝드르(A. M. Legendre, 1752 1833), 코오시 등 여러 수학자와 만났으나 갈로아는 가까운 곳에 살고 있었음에도 만나지 못한 것 같다.

그 후 베를린을 거쳐 크리스차니아에 돌아갔다. 아벨은 1828년 3월, 한스덴 교수 대신 대학에서 강의를 하게 되었다. 그러나 이전부터 걱정했던 결핵이 악화되어 1829년 4월 6일에 26세로 요절했다. 그 이틀 후에 크렐레로부터 베를린 대학의 교수로 임명된 통지를 받았다고 한다.

10. 순서

집합 E 에서의 이항관계 R 이

반사적; $(\forall x \in E)\,(xRx)$

반대칭적; $((xRy)$ 이고 $(yRx) \Rightarrow (x = y)$

추이적; $((xRy)$ 이고 $(yRz) \Rightarrow (xRz)$

일 때 R 을 순서 관계라고 한다.

이와 같은 관계를 $<$ 또는 $\leqq$ 로 나타낸다.

순서 관계의 개념은 N, Z, Q, R 에서의 '자연스러운 순서'로 알려진 관계 $\leqq$ 을 일반화한 것이다.

상등 관계는 순서 관계이다. 집합 E 의 멱집합 $\mathrm{P}(E)$에서 포함 관계는 순서 관계이다. 집합 E 에서의 순서 관계를 E 의 어느 두 원소를 택하더라도 비교 가능할 때 전순서 관계라 하고 그렇지 않을 때 반순서 관계라고 하기도 한다.

11. 부등식[3)]

'부등식'이라는 말을 문자 그대로 해석하면, 등식 $a = b$ 의 부정인 $a \neq b$ 의 식을 가리킬 수도 있지만, 보통 부등식이라고 하면 순서집합, 특히 실수의 집합에 속하는 2개의 원소 a, b 를 대소의 순서 관계를 나타내는 이른바 부등호

3) 박을용 외 6인, 수학대사전(상권)(서울: 한국사전연구사, 1995), pp.372 373

$<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$ 로 맺은 순서관계를 나타내는 식 $a < b$, $a > b$, $a \leqq b$, $a \geqq b$ 를 가리킨다. 따라서 '대소식'이라든가'순서식'이라고 말하는 편이 정확하나, 관례상 '부등식'이라는 용어가 쓰이고 있다.

등식에 항등식, 방정식이 있듯이, 모든 실수에 관해서 성립하는 부등식 (예 : $x^2 \geqq 0$) 을 절대부등식, 어떤 부분집합 X 에 대해서만 성립하는 부등식 (예 : $x(x-1) < 0$) 을 조건부등식이라고 한다. 그러나 이러한 구별은 다음과 같이 말하는 편이 정확할 것이다. 그 부등식이 성립하는 x 의 집합 X 를 구하는 것에 주안이 있을 경우가 '조건부등식'이며, X 를 한정하더라도 아무튼 $x \in X$ 에 있어서 $f(x) > 0$ (또는 < 0, $\geqq 0$, $\leqq 0$) 이 성립하는 것을 주장하고 싶을 경우가 '절대부등식'이다. 따라서 양의 실수 a, b, c 에 대한 절대부등식 $a^3 + b^3 + c^3 \geqq 3abc$ 라든가, 충분히 큰 x 에 대한 절대부등식 $x - 3 > 8 \log x$ 등과 같은 것도 사용한다.

부등식, 특히 각종 절대부등식은 해석학에 있어서, 이르테면 수렴의 증명, 오차의 평가 등에 널리 이용되는 기법이다. 그러나 그 증명에는 예컨데 '실수 x 에 대해서 $x^2 \geqq 0$ 이며, 등호는 $x = 0$ 에 한함'이라든가, '$f'(x) > 0$이면 $a < b$ 일 때 $f(a) < f(b)$' 따위의 극히 일반적인 원리 이외에는 통일적수법 이라는 것이 거의 없다. 그리고, 하나의 부등식이 몇 가지 방법으로 증명되는 수가 많다.

한 문자 x 를 포함하는 부등식은 이항에 의해서 언제든지 $f(x) > 0$ (또는 $f(x) \geqq 0$) 의 꼴로 정돈할 수 있다. $f(x)$ 가 실수 전체에서 정의된 연속함수이면, $f(x)$ 는 항상 ① > 0 이든가 ; ② < 0 이든가 ; ③ $\geqq 0$ 으로도 $\leqq 0$ 으로도 되든가 ; 의 어느 것이다. ①, ② 의 경우는, $f(x) = 0$ 은 실근을 갖고, ③ 의 경우는 $X = \{x \mid f(x) > 0\}$, $Y = \{x \mid f(x) < 0\}$ 이라 하면, X , Y 양쪽의 경계점에서 $f(x) = 0$ 이 된다. 또 α, β ($\alpha < \beta$) 가 $f(x) = 0$ 의 인접한 두 근이면 구간 (α, β)에서 $f(x)$ 의 부호는 일정하다. 따라서, 방정식 $f(x) = 0$ 을 풀므로써 부등식 $f(x) > 0$ 을 풀 수 있다. 두 개의 변수 x, y 에 관한 연립부등식

$f(x,y) > 0$, $g(x,y) > 0$ 에 있어서도, f, g 가 연속함수이면 일반적으로 곡선 $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ 으로 경계진 x, y 영역이 그 해가 된다. 변수의 수가 많을 경우에도 마찬가지이다.

특히 유명한 절대부등식에는 ① 평균 : 산술평균, 기하평균, 조화평균 ② Hölder 의 부등식(Cauchy-Schwarz 의 부등식) ③ Minkowski 의 부등식 등이 있다.

부등식의 기본 성질을 써서 정리한 결과 $ax^2 + bx + c > 0$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$) 라는 꼴로 할 수가 있는 부등식을 이차부등식이라고 한다. $D = b^2 - 4ac$ 일 때, D 의 부호에 따라, 다음과 같은 경우가 생긴다.

① $D < 0$ 인 경우 : $a > 0$ 이면 모든 x 에 대하여 이 부등식은 성립한다. 즉, 이 부등식은 절대부등식이 된다. $a < 0$ 이면, x 의 어떠한 값에 대해서도 이 부등식은 성립하지 않는다.

② $D = 0$ 인 경우 : $a > 0$ 이면, $x = -\frac{b}{2a}$ 이외의 모든 x 에 대하여 이 부등식은 성립한다. $a < 0$ 이면, x 의 어떠한 값에 대해서도 이 부등식은 성립하지 않는다.

③ $D > 0$ 인 경우 : $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$) 로 나타내면 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ 가 되므로, 이 부등식의 해는 $a > 0$ 이면 $x < \alpha$, $x > \beta$ 이고, $a < 0$ 이면 $\alpha < x < \beta$이다.

B. 수학적 오류

1. 오류연구의 방향

오류에 대한 연구를 함으로써 학생들의 인지능력을 파악할 수 있고 교수 -

학습시 더 효율적인 교육을 할 수 있기 때문에 오류에 관한 연구는 오랜 역사를 지니고 있다.

Radatz(1979)에 의하면, 미국에서는 1925년 경 Buswell & Judd가 산술적인 오류를 진단하여 30개이상의 연구를 한 바 있고, 독일에서는 Weimer(1925)와 Seemann(1929)이 오류를 연구하였다. 미국 연구의 방법과 가설은 행동주의에 기원을 두고있는 반면, 독일 등 유럽은 Gestalt theory와 교육학적인 개혁자들의 생각에 영향을 받는 등 학교 체제 구조의 차이에서부터 오류분석 면에 있어 매우 다른 출발과 관심의 차이가 있었다. 그러나 최근에는 산술적 계산에서의 오류에만 제한되지 않고 여러 방면으로 오류분석에 관심이 분산 증가되었는데 그 이유는 다음과 같다.

첫째, 수학에서의 규준지향과 표준지향평가에 대한 실망과 회의가 교수의 진단 측면에 대한 관심을 증가시켰다.

둘째, 교육과정에서 수학적 내용의 재구성은 더 많은 어려움과 오류를 생산할 것이라는 생각에서이다.

셋째, 수학교수의 개별화와 분화는 오류를 기술적으로 특별히 진단할 것을 요구한다. 교사들은 수학 내용이 교육적 발전과 사회철학을 통합하는 측면에서의 진단교수를 위한 실제 모델을 필요로 한다. 수학 교수의 내용에 대한 고려가 없는 개인적인 차이의 분석은 교사에게 교수의 개별화 또는 특별한 과제를 배우는데 있어서 실제적인 도움을 주지 못한다.

넷째, 임상조사, 사례연구, 교수학적 현상학 등 경험적 연구에 대한 전통적인 범례의 비판은 수학교육에서 다른 연구방법들을 자극시켜왔다.

1970년대 이후로는 미국의 B. Holtan, & J. D. Knifong(1976), 독일의 H. Radatz, 오스트레일리아에서 Clements(1980)와 Newman(1981), 이스라엘의 N. M. Hadar, & O. zaslavsky(1987)등 각국의 수학자들이 오류에 관한 연구를 활발히 하고 있다.

2. 실험 연구 사례 및 오류의 분류

B. Holtan, & J. D. Knifong(1976)은 초등학교 6학년 학생 35명을 대상으로 MAT(Metropolitan Achievement Test)를 실시한 후 학생들의 오답을 분류하여 오기 및 계산상의 오류와 그 밖의 오류로 구분하고 두 범주를 다시 세분하여 그 빈도 수를 조사하였는데 그것은 <표 2-1>과 같다.

<표 2-1> 오류의 빈도수 및 백분율

오류 범주	빈도수	백분율
1. 오기 및 계산상의 오류		
① 오기	12.5	3%
② 계산상의 오류		
ⓐ 변수에 관한 오류	61.5	13%
ⓑ 분수에 관한 오류	88.5	19%
ⓒ 표기와 단위의 표준에 관한 오류	80.5	17%
2. 그 밖의 다른 오류		
① 평균과 면적오류	22.5	5%
② 잘못된 연산의 사용	30.5	6%
③ 무응답		
ⓐ 그러나 다음 문제를 계속 푸는 경우	58.5	12%
ⓑ 더 이상 문제를 풀고자 하지 않음	85.5	18%
ⓒ 단서가 제시되지 않고 틀린답	30.5	6%
합 계	470	100%

독일의 수학자 Hendrik Radatz(1979)는 오류를 범하게 되는 범주를 다음 다섯 가지로 구분하여 제안했다.

① 언어의 난이성(language difficult)

② 공간적인 정보 획득의 어려움(difficulties in obtain spatial information)

③ 필수적인 기술, 사실, 개념의 부족한 숙련(deficient mastery of prerequisite skills, facts and concepts)

④ 사고의 경직 혹은 부정확한 연합(incorrect associations or rigidity of thinking)

⑤ 부적절한 규칙이나 전략의 적용(application of irrelavant rules or strategies)

Pippig(1975)은 이 오류의 범주 중 사고의 경직이나 부정확한 연합에 의한 오류, 반대의 치환으로부터 생기는 오류들을 흥미 있게 다음의 다섯 가지로 분류했었다(오정현. 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구. 1996. 에서 재인용).

① 보존의 오류 : 업무나 문제의 단순한 영역에서 자주 나타난다.

② 연합의 오류 : 단순 요소 사이의 부정확한 연합의 경우이다.

③ 방해의 오류 : 다른 연산이나 개념이 서로 방해하는 경우이다.

④ 동화의 오류 : 부정확한 듣기가 읽기나 쓰기에서 실수를 유발시키는 경우이다.

⑤ 전 작업으로부터의 반대 치환의 오류 : 일단의 연습이나 언어적 문제로부터 얻게되는 잘못된 생각의 효과를 동일시하는 경우이다.

Pippig이 분류한 오류들을 살펴보면 비슷한 문제에 대한 경험이 사고의 습관적인 경직성을 가져오면서 학생들이 오답을 쓰게됨을 알 수 있다.

Clements(1980)와 Newman(1981)은 오스트레일리아에서 5 7학년을 대상으로 테스트를 실시하여 학생들의 오류에 관한 연구를 하였는데 단계별 조직과 그 빈도수를 다음 <표 2-2>와 같이 구분하였다.

<표 2-2> **오류 범주별 빈도수**

	Clements 연구(1)	Clements 연구(2)	Newman
① 읽기 단계(Reading)	8	5	13
② 이해 단계(Comprehension)	14	8	22
③ 변환 단계(Transformation)	27	25	12
④ 처리 기술 단계(Process skill)	27	32	26
⑤ 기록 단계(Encoding)	2	2	2
⑥ 부주의(Careless)	22	28	25

이상에서 보면 학생들이 오답을 쓰게 되는 것은 처리 기술에서의 미숙함이나 부주의가 주원인이고 문제 자체에 대한 이해 측면에서의 부족함도 한 원인임을 알 수 있다.

Casey(1980)는 다단계 문제(many step problems)를 포함하는 테스트 방법을 사용하였는데 Clements & Newman과의 차이점은 학생이 각 단계에서 오류를 범하면 그 때마다 그것을 지적·설명해주고 다음 과정으로 나아갈 수 있도록 도와 준 것이다. Casey는 문제 형태를 위계 안에 포함시키고 전략 선택과 기술 선택으로 세분화하였고, 동기와 부주의의 범주는 '알고있는 영역'과 '미지의 영역'으로 분류하였는데 그 내용은 다음과 같다(오정현. 1996. 에서 재인용) .

① 문제 형태(Question form)

② 읽기(Reading)

③ 이해(Comprehension)

④ 전략 선택(Strategy selection)

⑤ 기술 선택(Skills selection)

⑥ 기술 적용(Skills Manipulation)

이스라엘의 N. M. Hadar, & O. zaslavsky(1987)는 고등학교 학생들이 수학

졸업 시험에서 범한 오류들을 분석하여 다음 여섯 가지로 분류하였다.

① 잘못 이용된 자료(Misused Data) : 문항에 주어진 자료와 학생들이 사용한 자료사이의 불일치로 인한 오류

② 잘못 해석된 언어(Misinterpreted language) : 수학적 사실들을 하나의 수학적인 기호 언어에서 다른 언어로 옮기는 과정의 부정확에서 오는 오류 즉, 문제 내용을 잘못 해석하는데서오는 오류

③ 논리적으로 부적절한 추론(Logically invalid inference) : 주어진 정보로부터 혹은 전에 잘못된 것으로부터 새로운 정보가 부적절하게 이끌어 지는 데서 오는 오류

④ 곡해된 정리나 정의(Distorted theorem or definition) : 특수한 원리, 법칙, 정리 또는 정의를 부적절하게 사용한 경우

⑤ 논증되지 않은 해답(Unverified solution) : 학생들이 밟은 각 단계들이 그 자체로는 옳으나, 검토를 하지 않음으로 인해 나타난 마지막 결과가 언급된 문제의 답이 아닌 경우

⑥ 기술적 오류(Technical error) : 계산상의 오류, 표로부터 자료를 잘못 끌어내는 오류, 기초적인 대수 기호를 다루는데 있어서의 오류, 초등학교 또는 중학교 수학에서 습득된 알고리즘을 시행하는데 있어서의 오류 등이 여기에 포함된다.

이상은 연속적으로 두 해에 걸친 시험 결과의 분석으로, 첫 해에 130개, 두 번째 해에 150개, 총 280개의 오류들을 분류해 냈으며, 그 오류들의 각 범주별 백분율은 <표 2-3>과 같다.

<표 2-3> 각 오류 범주별 백분율(%)

범주	첫 해	두 번째 해
잘못 이용된 자료	22	20
잘못 해석된 언어	17	18
논리적으로 부적절한 추론	2	1
곡해된 정리나 정의	34	32
논증되지 않은 해답	0	2
기술적인 오류	25	27

<표 2-3>에 의하면 고등학생의 경우에는 기술적인 오류도 흔히 범하지만 정리나 정의를 적절하게 사용하지 못하는 데서 오는 오류가 상당한 부분임을 알 수 있다.

김옥경(1990)은 고등학교 학생들을 대상으로 테스트를 실시하고 오류를 분석 연구하여 오류의 분류 모델을 제시하였다.

확률과 통계 단원을 제외한 고등학교 수학과정을 모두 배운 고등학교 3학년 학생들을 대상으로 한 테스트는 12개의 주관식 문항으로 구성되었으며 오류 분류 모델은 여덟 가지 범주로 Hadar의 여섯 가지 범주에 '풀이 과정이 생략된 오류'와 '오류의 애매 모호성'이 추가된 것이다.

김옥경의 오류 분류에 따르면 역시 곡해된 정리나 정의에 의한 오류의 빈도가 가장 높았고, 이것으로 보아 학생들이 수학적 정리나 정의를 이해하는데 문제가 있음이 밝혀졌다. 또한, 각 문항별 오류를 살펴보면 삼각함수, 함수와 그래프, 수열, 지수와 로그, 미분법 문항에서 오류가 발생했음을 알 수 있다. 그의 분류 모델 및 빈도수(%)는 다음과 같다.

<표 2-4> 김옥경의 오류 범주별 빈도수(%)

오류의 종류	빈도수(%)
① 오용된 자료(Misused data)	16.8
② 잘못 해석된 언어(Misinterpreted language)	11.8
③ 논리적으로 부적절한 추론(Logically invalid inference)	4.6
④ 곡해된 정리나 정의(Misunderstood theorem or definition)	30.2
⑤ 요구되지 않은 해답(Unmatched solution)	5.5
⑥ 기술적 오류(Technical errors)	11.4
⑦ 풀이 과정의 생략(Omission of solving process)	16.2
⑧ 오류의 애매 모호성(Ambiguity of error)	3.5

<표 2-5> 테스트 문항별 오류 범주의 빈도수

오류 모델 / 문 항	1*	2*	3*	4*	5*	6*	7*	8*	계
집합과 명제	3	2	13	9	5	2	8		42
수와 식	8	9		1	2	3	2	1	36
방정식, 부등식	12	2	2	1	7	4	3		31
도형의 방정식	2	14		1	3	11	5		36
함수와 그래프	14	7	1	2		3	13	3	43
지수와 로그	2	2	1	39	1	3	2	1	51
삼각함수	3			38	6	13	7		67
수열	2	2		39		1	6	3	53
행렬		2		1	1	8	4	2	18
극한	13	2		1		1	5	4	26
미분법	17		4	2		3	1	2	43
적분법	1	12		4			4		21
계									457

* : <표 2-4>의 김옥경이 제시한 오류의 분류 모델

임성식(1990)은 고등학교 2학년학생을 대상으로 H. Radatz의 오답분석 방법을 기초로 하여 소집단 학습을 통한 오답개발카드를 작성 활용함으로써 명제 단원에서의 오류의 요인을 다음 10가지로 분류하고 있다.

① 새로운 용어의 정의에 익숙하지 못하기 때문에
② 새로운 기호에 익숙하지 못하여 비슷한 기호사이에 혼란이 일어남
③ 일상생활 용어와 명제에서의 용어와의 뜻의 혼란 때문에
④ 기계적 계산에는 익숙하나 조직적으로 사고하고 판단하는 힘이 모자람
⑤ 사고 방법이 단순하여 융통성이 없음
⑥ 과거에 사용한 경험이 있는 방법만 계속 사용하려는 경향 때문에
⑦ 형식이나 계산 방법을 일정하게 지도함으로 인한 응용력의 부족
⑧ 문제를 하위 요소별로 분류하려는 시도가 부족하여
⑨ 집중력이 부족하여 논리적으로 사고하기를 꺼리는 경향 때문에
⑩ 다양한 문제를 행해 보지 못했기 때문에

오세경(1995)은 중학교 1학년 학생을 대상으로 하여 수학 학습지도에 있어서의 오류 유형의 분류 및 그 지도방안에 대한 연구에서 오류의 요인을 다음과 같은 여섯 가지로 분류하였다. ① 수학에 대한 두려움 ② 용어와 정의에 익숙하지 못함 ③ 기호에 익숙하지 못함 ④ 응용력 부족 ⑤ 논리적 사고 기피 ⑥ 계산능력 부족

오정현(1996)은 중학교 1, 2, 3학년 학생을 대상으로 함수영역에서 학생들이 저지르는 오류를 분석 연구한 실험결과를 다음과 같이 보고하고 있다. 필수적인 사실이나 개념의 부족한 숙련에서 오는 오류가 가장 많고 기술적인 숙련의 부족에서 오는 오류도 흔히 범하게 되는 오류임을 알 수 있다. 그러나 학년별로 살펴보면 학년이 높아질수록 필수적인 사실, 개념의 부족한 숙련에서 오는 오류는 감소하는 대신 풀이 과정의 생략은 점점 증가함을 볼 수 있고, 기술적인 오류는 전학년에 걸쳐 중요한 오류 범주중의 하나로 자리잡고 있다. 그러나 이것은 학년이 높아질수록 필수적인 사실, 개념에 대한 습득이 잘 된다기보다

는 문제 풀이 과정에서 다음 단계가 잘 추론되지 않을 경우 풀이과정을 더 이상 계속하지 않기 때문이라고 지적된다. 실제로 시험지의 분석결과 3학년의 경우, 풀이 과정을 중도에 포기하거나 문제 풀이에 대한 자신이 없어 임의의 답만을 제시한 경우, 혹은 아예 답을 쓰지 않은 경우가 빈번하다.

류성림(1993)은 중학교 3학년 학생을 대상으로 한 기하증명능력 수준을 측정하고, 그 증명과정에서 나타나는 오류를 분석하기 위한 연구에서 Becker가 설정한 기하 증명과정에서 나타나는 오류의 분류 모델 8가지(특별한 지식의 부족, 문장이나 도형의 한가지 부분이나 요소의 부적절한 이해에 의한 오류, 어떤 요소의 일부 형태가 우세함으로 기인하는 오류, 부화화·부호해독·재부호화를 할 때 정보교환에 기인하는 오류, 연산자를 적용할 때 정보를 잃는 것, 연산자의 부적절한 적용으로 인한 오류, 더 수준 높은 단위의 부적절한 이해에 의한 오류, 시행착오 전략)를 참고로 하여 다음과 같이 9가지로 오류를 분류하고 있다.

① 가정을 잘 이용하지 못하는 오류
② 도형에 집착하여 생기는 오류
③ 연산자의 잘못된 적용
④ 연산자의 잘못된 실행
⑤ 증명과정의 일부 생략
⑥ 결론을 바르게 내리지 못함
⑦ 기술적인 오류
⑧ 논리적 추론의 결여
⑨ 오류의 애매 모호함

신인숙(1996)은 중학생들이 함수의 그래프와 대수식에 대하여 가지고 있는 오개념 및 오류분석과 표상방법에 따른 문제해결력의 차이를 알아보기 위한 연구에서 이스라엘의 수학자 Nitsa Movshovitz Hadar의 오류모델 6가지(잘못 사용된 자료, 문제 내용의 잘못된 해석, 논리적으로 부적절한 추론, 왜곡된 정

의나 정리, 검증되지 않은 해답, 기술적인 오류)를 참고로 하여 다음의 7가지 범주로 오류를 분류하였다.

① 문제의 자료를 잘못 사용하는 오류

② 문제 내용을 잘못 해석하는 오류

③ 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류

④ 문제에서 요구하지 않은 것을 답하는 경우

⑤ 기술적인 오류

⑥ 풀이 과정의 생략

⑦ 오류의 애매 모호함

이상원(1993)은 고등학교 1학년 학생을 대상으로 대수적 문제해결에 있어서 전략선택과 오류분석에 대한 연구에서 계산 오류, 연산 오류, 실행 오류의 세 영역으로 나누어 오류분석을 하였는데, 그는 오류들은 한 가지 원인에 의해 발생되는 것도 있지만, 대부분은 복합적 원인에 의해 발생된다고 하였다. 그 내용을 좀더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

① 계산 오류 : 학생의 부주의에 의해 발생된다.

② 연산 오류 : ⓐ 동류항 계산의 오류 ⓑ대입에서의 오류 ⓒ 근 표현의 단순화에 대한 오류 ⓓ 근의 공식을 사용하면서 발생된 오류 ⓔ 방정식에 관한 오개념으로 발생된 오류 ⓕ 인수분해의 오류 ⓖ문제의 요구(목표)를 상실한 오류 ⓗ 방정식의 변형에서 발생된 오류

③ 실행 오류 : ⓐ문제 파악 부족으로 발생된 오류 ⓑ 잘못 기재 혹은 읽어서 발생된 오류 ⓒ 논리적 서술이 부족하여 발생된 오류 ⓓ 문제해결 단계를 단축해서 발생된 오류

류한영(1999)은 중학교 3학년과 고등학교 1학년 학생을 대상으로 방정식을 푸는 과정에서 학생들이 범하고 있는 오류의 유형을 조사·분석하여 다섯 개의 오류의 모형을 제시하고 있는데, 이는 다음과 같다.

① 기본지식의 결여에서 오는 오류 : 이 모형의 오류는 문제에 관한 기본 지

식이 없는 경우이거나 표현을 못하는 경우로 식을 잘못 세우는 경우도 여기에 속한다.

② 조건을 잘 이용하지 못하는 오류 : 주어진 전제 조건을 잘못 이해하거나 활용을 잘하지 못하여 생기는 경우

③ 등식의 미숙에 따른 오류 : 문장제 문제를 푸는데 있어서 상등 관계의 식을 잘못 세우는 경우

④ 애매한 오류 : 학생들이 문제를 풀이한 과정이 애매 모호하여, 학생이 제시한 답을 보고 학생의 의도를 정확히 파악할 수 없는 경우

⑤ 실수나 부주의로 인한 경우 : 풀이과정이 합리적이어서 오류로 분류하기 어려운 경우

이상에서 살펴본 것처럼 수학에서 발생하는 오류에 대한 연구가 각 국에서 많은 수학교육자들에 의해 다양한 측면에서 이루어지고 있음을 알 수 있다.

C. 약정 방법(Protocol methods)[4)]

수학적 인지개발에 관한 연구는 실험실에서 시간 측정 방법으로부터 자연적 측정에까지 다양한 데이터 수집방법을 사용하고 있다. 그 중에서 연구자들은 protocol methods(talking aloud procedure와 임상 인터뷰)에 많은 관심을 가지고 있다.

약정 방법(protocol methods)을 수행하는 데에는 결과적으로 쓰여진 약정(written protocol)안에 표현된 다량의 데이터를 수집하는 작업이 포함된다. 약정(protocol)은 지능적 활동에 포함된 저변의 인지과정들에 대한 추론을 하는데 기초로 사용된다.

---

4) 이상원, 고등학교 학생의 대수 문제해결: 전략과 오류분석(한국교원대학교 석사학위논문, 1993), pp.21 26.

1. 큰 소리로 말하기 방법(Talking aloud method)

Newell & Simon(1979)은 큰 소리로 말하기 방법을 많이 사용하였는데, 큰 소리로 말하기 방법에서는 학생이 도전적인 문제(쉽지 않고 아주 어렵지도 않은 문제)를 해결하는 동안 그의 머리에 떠오르는 모든 것을 말하도록 지시를 받는다. 크게 말하라는 초기 지시만을 할 뿐 연구자는 관련된 과업을 제시하는 외에는 거의 간섭을 하지 않는다.

큰 소리로 말하기 방법의 절차에서 자료는 주로 학생의 말과 연구자의 적은 질문 및 지시로써 구성된다. 때로는 행동적 관찰을 하기도 한다. 이 약정(protocol)은 말과 그리고 이와 관련된 행동을 보존한다.

큰 소리로 말하기 방법을 사용하는 연구자의 목적은 지능적인 어른들이 문제해결에 사용하는 복잡한 현상을 구성하는 종합적인 행동을 이끌어내고 묘사하는 것과 그리고 어른의 문제해결의 저변에 깔린 내적 처리 방법과 인지과정을 알아내는데 있다. 이들 두 개의 목적은 연구 대상자가 쉽지도 어렵지도 않은 문제를 해결하고 조사자의 간섭이 최소한인 상황으로부터 자료를 수집함으로써 가장 잘 성취될 수 있다고 주장되어 왔다.

2. 임상 인터뷰(Clinical Interview)

임상 인터뷰 방법은 언어(verbal) 방법과 개정된(revised) 방법의 두 형태를 취한다. 피아제에 의하여 처음 사용된 바와 같이 언어 방법은 전적으로 말을 사용하는 수준에서 어린이 각자에게 유연한 질문을 제시한다. 구체적 사물은 인터뷰에 의하여 부과된 문제를 설명하거나 표현하는 일은 하지 않는다. 개정된 방법은 피아제가 언어 방법이 적당하지 못할 때(언어를 잘 구사할 줄 모르는 어린이의 경우 등등)에 대비하여 개발하였다. 피아제는 해결되어야 할 문제를 서술하는데 구체적 사물을 사용함으로써 이 방법을 개선하려고 시도하였다.

이들 구체적 보조물은 문제를 더욱 잘 이해하도록 하고 어린이들에게 이들 사물을 갖고 노는 기회를 제공하여 결국 그의 생각을 알아본다. 개정된 방법에서는 흥미 있는 자료가 언어와 비언어적 행동의 두 가지이다.

인터뷰는 연구자의 반응에 따라서 질문이 달라질 수 있는 유연한 태도로 문제와 질문을 제시한다.

피아제는 인지 개발의 연구에 중점을 둔 다음의 세 가지 목적을 달성하기 위하여 임상 인터뷰 방법을 개발하였다.

① 지능적 활동을 이끌어냄

② 자연의 명시와 인지과정의 구조 파악

③ 어린이의 인지적 능력 수준의 평가

인지적 개발에 대한 연구의 궁극적인 목적은 다음과 같다.

첫째, 여러 상황 아래에서 어린이에 의하여 사용된 인지적 활동을 이끌어 내는데 있으며, 하나의 반응을 측정하는 것보다는 복잡한 순차적 사고를 연결하는 인식을 측정하는 것이 보다 더 적당하다.

둘째, 인지과정의 본질과 구조의 명시를 조합한다. 일단 관련된 지적 활동이 유도되면, 이들의 저변에 깔린 인지적 과정들이 자세히 조사되어져야 하고 가능한 정확하게 묘사되어야 한다. 피아제는 이러한 과정들을 지능의 '구조'라는 용어로 묘사하는데, 지능의 구조란 넓은 영역의 과업을 수행하는데 있어서 저변에 깔려 있으리라고 생각되는 일반적 정신능력 이다. 지적 활동의 유도와 인지과정의 명시 등은 여러 수준의 명시에 작동한다. 연구의 첫 단계에서, 우리는 낮은 수준의 명시를 갖고 있고 연구자는 관련 형상의 초보적 징조와 그들 저변에 깔린 인지과정의 초보적 징조를 구하기 원한다. 이러한 연구단계를 "발견이 연관되었다"라고 일컫는다. 임상 인터뷰는 예상 못한 결과를 자연스럽게 관찰하는 것을 가능하게 하고 그들의 뜻을 유연하게 탐색하는 것이 가능하도록 디자인되어야 한다. 그래야만 발견의 목적을 충족시킬 수 있다. 좀

더 정확한 수준의 연구에서, 연구자는 더욱 흥미 있는 경험적 자료를 얻기 위하여 그리고 인지과정의 정확한 묘사를 개발하기 위하여 발견의 단계를 넘어서기를 원한다. 이를 "명시"라 일컫는다. 5 + 5 = 10이라는 답은 기억에 의해서 나올 수도 있고 손가락을 헤아리거나 다른 전략에 의하여 해결할 수도 있다. 이러한 다른 전략을 구별하는 것은 5 + 5 = ?과 같은 표준 문제를 제시함으로써 성취되는 것이 아니고 임상방법을 포함한 유연한 질문 방법에 기인한다.

셋째, 인지적 능력의 평가이다. 피아제의 정리는 저변의 능력을 설정하는데 목표를 두었지 특정의 성능(特定경우에 대한 어린이의 보통의 행동)을 다루지는 않았다. 능력연구는 세 영역에 초점을 맞춘다(주관적 동일, 반응의 진지성, 반응의 강도). 연구자는 ① 어린이가 질문을 의도한대로 이해하고 있는지 아닌지, ② 어린이가 과업을 진지하게 받아들이는지, ③ 어린이의 반응이 확고한지 아닌지를 결정해야 한다.

3. 혼합 방법

① 큰 소리로 말하기 방법과 임상 인터뷰 방법의 혼합

간단한 큰 소리로 말하기 방법의 변형으로 연구자가 가끔 참견하는 것을 들 수 있다. 기하 문제해결에서 연구자는 "그래" 라는 말을 가끔 하는 이외에는 참견하지 않는 것인데 연구대상자가 그의 생각의 중요 부분을 표현하지 못할 때, "자 네가 각-변-각을 사용하려고 한다고 말할 수 있다고 생각하느냐?" 하는 정도의 참견을 허락한다. 그러나 이러한 참견을 제외하면 이것도 전형적인 큰 소리로 말하기 방법과 같다.

② 큰 소리로 말하기 방법과 개정된 임상 인터뷰 방법의 혼합

이 방법은 인터뷰의 문제를 제시하고, 연구 대상자가 보이는 반응, 말로하기, 속삭임, 그리고 쓰여진 解 등을 분석한다. 연구자가 말로하길 유도하지 않아도

되므로 전형적인 큰 소리로 말하기 방법은 아니다. 문제해결의 즉각적 모델을 만들기 위하여 큰 소리로 말하기 방법을 사용하였고, 이 모델에 의하여 얻는 가정을 체크하기 위하여 일종의 임상인터뷰 방법을 사용한다.

4. 목표의 비교

큰 소리로 말하기 방법을 사용하는 연구자와 임상 인터뷰 방법을 사용하는 연구자는 최소한 두 가지 기본적인 목적을 가진다. 이들 두 가지 공통목적은 지능적 활동의 유도와 인지 과정의 본질과 구조의 명시라는 것이다. 이 목적을 달성하기 위하여 임상 인터뷰는 어린이의 생각이 어디로 가든지 따라간다. 큰 소리로 말하기 방법을 사용하는 연구자는 연구 대상자의 머리에 스치는 무엇을 말할 때 최소로 간섭한다. 양쪽의 모든 연구자들은 인지과정의 본질과 구조의 명시에 흥미를 갖는다. 이 목적을 달성하기 위하여, 임상 연구자는 대상자의 반응에 따라 비판적 테스트(critical tests)를 한다.

큰 소리로 말하기 방법을 사용하는 연구자와 임상 인터뷰를 사용하는 사람들은 능력에 대해 다른 생각을 한다. 임상 인터뷰의 사용자는 능력의 평가를 중요하게 생각하고 대상은 어린이들이다. 목적은 각 어린이의 최대 수준의 기능(어린이의 현재 발달 수준에서)을 알아내는 것이다. 큰 소리로 말하기 방법의 사용자는 각자가 최고수준의 능력에서 수행한다고 믿으며 대상은 어른들이다. 개정된 임상 인터뷰를 사용하는 것은 대상자의 언어능력, 이해력 부족, 비협조적인 태도의 경우에 할 수 없이 사용된다.

간단히 말하면, 인지적 과정의 유도와 명시라는 면에서 두 가지 약정의 사용목적은 공통적이다. 능력에 강조를 두는 정도가 다른 것은 두 방법의 대상자가 서로 다르기 때문이다. 목적이 같으므로 두 방법의 혼합 방법을 만들 수 있으며, 혼합방법에서는 큰 소리로 말하기 절차의 자발적 언어화와 임상적 방법의 초점을 맞춘 질문을 모두 사용한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

A. 연구 대상

연구문제1, 2를 수행하기 위하여 인천광역시에 소재하고 있는 인문계고등학교 중에서 학력수준이 중위권인 3개 학교를 선정하여 D고등학교 1학년 학생 한 개 학급 45명, Y고등학교 1학년 학생 한 개 학급 43명, S고등학교 1학년 학생 한 개 학급 44명 총 132명을 선정하였으며, 세 학교 모두 방정식과 부등식 단원을 이미 학습하였다.

연구문제3을 수행하기 위하여 연구대상인 D고등학교 학생 45명 중 이해의 오류, 전략선택의 오류, 처리기술의 오류를 범한 학생들을 대상으로 각 영역별로 한 명씩 총 세 명을 선정하여 오류교정의 과정을 살펴봄으로써 그들의 변화된 모습을 제시하였다.

B. 검사 도구

연구문제1, 2를 해결하기 위해서 선정된 132명의 학생에게 부록A의 오류 검사지를 실시하였다. 여기에 사용된 문항은 이차방정식에 관한 문제 8개와 이차부등식에 관한 문제 5개로 구성하였으며, 모두 주관식으로 구성하였다.

연구문제3을 해결하기 위해서 사용된 교정 검사지는 이차방정식에 관한 문제 2개와 이차부등식에 관한 문제 2개, 그리고 방정식과 부등식을 하나의 카테고리로 이해하고 있는가에 대한 문제 1개로 구성하였으며, 모두 주관식으로 구성하였다.

C. 연구 방법 및 절차

본 연구는 오류의 유형을 분류하고 그 원인을 파악함과 동시에 오류의 교정 과정을 밝혀내기 위한 임상연구이다.

1. 오류 검사

오류의 유형과 원인 분석을 위한 오류 검사지는 수학교사의 감독아래 방과 후 적당한 시간을 선택하여 각기 다른 3학교에서 한 개 반씩 3개 반의 학생들에게 본 연구의 개괄적 요지를 설명한 후 문제를 제시하였다. 검사자료의 신뢰성을 높이기 위하여 사전에 연구자와 감독교사들은 검사실시 요령에 관하여 다음과 같이 충분히 논의하였다. ① 검사실시 전에 학생들에게 검사의 목적에 대하여 자세히 설명한다. 문제는 각 장에 따로 따로 한 문제씩 작성하여 제시하였으며, 되도록 사고의 과정과 풀이 과정을 생략 또는 축소시킴 없이 오류검사지에 전 풀이과정을 상세히 기록하도록 하였고, 연습지 없이 직접 풀이과정과 답을 오류검사지에 적어 넣도록 하였으며, 풀이과정에서 오류가 발생하였을 경우 지우개를 사용하여 지우거나 알아보지 못하게 없애버리지 말고 두 줄로 그어 삭제의 뜻을 표시하고 그 밑에 계속하여 풀이하도록 하였다. ② 문제해결 과정에서 힌트를 요구하는 발언은 하지 못하게 하였으며, 마지막 해를 분명히 대답하도록 요구하였다. ③ 학생들의 사고 진행에 영향을 주는 발언은 최소한으로 삼가 하였으며, 학생들 상호간에 영향을 주지 않도록 하였다. ④ 학생들로 하여금 편안한 분위기에서 솔직하게 정성껏 작성하도록 하였으며, 학생들이 문제를 풀이하는 데 걸리는 시간은 50분을 제공하였으나 요청이 있으면 연장을 허락하였다.

2. 면담 절차

연구문제3을 해결하기 위한 면담 방법은 문헌연구에서 제시된 큰소리로 말하기 절차의 자발적 언어화와 임상적 방법의 초점을 맞춘 질문을 모두 사용하는 '혼합방법'을 사용하였으며, Polya의 문제해결 4단계전략(문제의 이해, 해결계획 수립, 계획의 실행, 반성)을 활용하여 연구자가 면담자료(부록C 참조)를 작성하여 면담을 실시하였다. 모든 학생은 개인적으로 면담을 받으며 문제를 해결하게 하였고, 면담을 실시하기 전에 본 연구에 대한 개괄적인 요지를 설명한 후 면담을 실시하였다. 면담시간은 방과후 시간으로 정하였으며, 소요시간에 제한을 두지는 않았다.

문제는 쓰여진 약정(written protocol)을 작성하기 위하여 각 장에 따로 따로 한 문제씩 작성하여 제시하였으며, 되도록 사고의 과정과 풀이 과정을 생략 또는 축소시킴 없이 교정검사지에 자신이 생각하고 있는 것과 풀이과정을 상세히 기록하도록 하였으며, 연습지 없이 직접 풀이과정과 답을 교정검사지에 적어 넣도록 하였고, 풀이과정에서 오류가 발생하였을 경우 지우개를 사용하여 지우거나 알아보지 못하게 없애버리지 않고 두 줄로 그어 삭제의 뜻을 표시하고 그 밑에 계속하여 풀이하도록 하였으며, 마지막 해를 분명히 대답하도록 요구하였다. 연구대상자의 사고 진행에 따라 그의 머리에 떠오르는 모든 것을 말하도록 지시하였고, 연구대상자의 반응에 따라 연구자가 준비한 면담자료를 기초로 하여 적절한 질문을 제시하였으며, 연구대상자가 보이는 반응·말로하기·속삭임·쓰여진 解 등을 분석하였다.

학생들의 문제해결 활동 및 면담은 언어약정(verbal protocol)을 작성하기 위하여 카세트 녹음기를 옆에 두고 1 : 1면담 형식을 취하여 관찰·기록하였으며, 모든 면담은 외부의 영향을 받지 않기 위하여 상담실이나 어학실에서 실시하였다.

학생들에게 문제해결 과정에서 사고하는 내용이나, 해결 과정을 설명하면서

문제를 해결하도록 요구하였으며, 만약 어떤 학생이 사고의 과정을 설명하는 것을 불안하게 나타내는 경우에는 문제를 완전히 해결하게 한 후에 사고를 재생하여 설명하도록 요구하였다.

학생들에게서 오류가 발생할 때마다 학생들의 인지적 활동을 유도하기위한 초점을 맞춘 질문을 함으로써 학생들이 스스로 오류를 교정해나가도록 하였다.

D. 자료 분석

1. 오류 분석

본 논문에서는 오류를 분석하기 위하여 인천광역시에 소재하고 있는 인문계 고등학교 세 개교(D고교, Y고교, S고교)에서 1학년학생들을 대상으로 각각 한 학급씩 총 세 개 학급에서 총 132명(D고교-45명, Y고교-43명, S고교-44명)에게 오류검사를 실시하여 학생들의 답안을 채점한 후 학생들이 문제풀이 과정에서 보여준 풀이 방법을 분석하여 오답을 쓰기까지의 원인을 분류하였다. 학생들이 어떤 문항에 대해 옳은 답을 제시했거나, 전혀 어떤 풀이 과정이나 답을 제시하지 않은 것은 본 연구의 대상에서 제외 시켰다. 또 같은 학생이 동일한 문제를 푸는 과정에서 연속해서 오류가 발생하는 경우에는 제일 처음으로 발생한 오류만을 분석하고, 선행된 오류로부터 발생한 다음 단계의 오류는 포함시키지 않았다.

각 문항들에 포함된 오류들은 Casey의 오류모델 6가지(문제형태, 읽기, 이해, 전략선택, 기술선택, 기술적용)와 Polya의 문제해결 4단계전략(문제의 이해, 해결계획 수립, 계획의 실행, 반성)를 참고하여 그 성격에 따라 이해의 오류, 전략선택의 오류, 처리기술의 오류 및 반성의 미 실행에 의한 오류의 네 가지 항목으로 모델을 설정하여 분석하였다.

학생들의 문제 해결 형태는 오류를 분석하는데 사용되었다. 학생들이 문제를

해결하는 과정에서 두 줄을 긋고 오류를 수정하였더라도 오류를 분석하였다.

위의 네 가지 오류 모델에 따라 132명의 학생들의 답지로부터 총832개의 오류를 뽑아 오류분석을 실시하였으며, 그 결과 전체 오류의 91.59%에 해당하는 762개의 오류가 위의 네 가지 범주로 분류되었고, 나머지 8.41%에 해당하는 70개의 오류가 분류되지 않은 상태로 남았다. 남아있는 오류들은 ① 풀이과정 없이 단순히 답만 제시하거나, ② 학생들이 문제를 풀다가 그만둔 경우, ③ 현 단계까지의 풀이과정은 옳으나 다음 단계의 풀이과정이 생략된 경우, ④ 학생들이 주어진 문항에 답을 하는 과정에서 글자가 흐릿하거나 애매 모호하여 연구자가 정확히 식별하기 난해한 경우, ⑤ 학생들이 제시한 답을 보고 연구자는 연구대상자가 답하고자 하는 의도를 정확히 분석할 수 없는 경우 등이다. 따라서 이 70개의 오류들을 연구자는 '오류의 애매 모호함'으로 명명하여 마지막 오류 범주로 처리하였다.

이상을 종합하면, 132명의 학생들의 답지에서 나온 832개의 오류들은 다음과 같이 5개의 범주로 분류되었다.

1) 이해의 오류
2) 전략선택의 오류
3) 처리기술의 오류
4) 반성의 미 실행에 의한 오류
5) 오류의 애매 모호함

2. 자료의 분석방법

연구문제1, 2를 해결하기 위하여, 오류검사지(부록A)에 대한 학생들의 풀이과정을 적어놓은 프로토콜을 이용하여 전체오류에 대한 각 오류의 범주 비율을 백분율로 계산하였다.

연구문제3을 해결하기 위해서 교정검사지(부록B)에 대한 학생들의 풀이과정

을 적어놓은 프로토콜과 면담내용을 녹음한 녹음테이프를 분석하여 언어약정 (verbal protocol)을 작성하였다.

Ⅳ. 오류모델의 설정

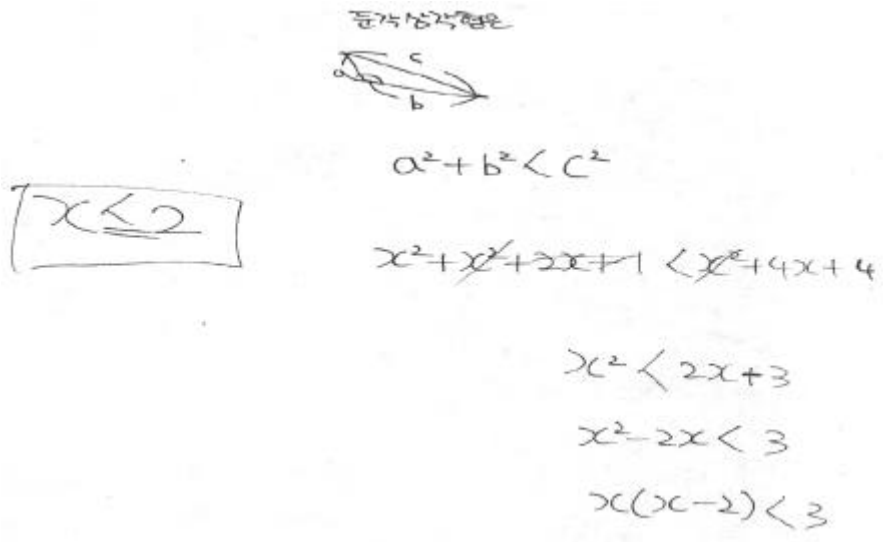
오류모델은 학생들이 주어진 수학문제를 풀 때 일어나는 오류를 종류별로 분류해 보고 그에 알맞게 명칭을 붙이는 일로서 이러한 분류는 교수-학습의 두 가지 측면에서 중요한 역할을 한다. 첫째는 학생들의 오류의 원천과 형태를 파악하고 각각의 오류에 대한 피드백을 가져다 줄 수 있다. 오류유형은 종종 내재하는 수학적 개념의 잘못된 이해, 문제해결전략의 부족이나 미성숙함을 드러나게 한다. 오류의 발생은 학생들의 이해 약점에서 생기게 되며, 교사는 이런 약점을 알아야 다음 지도계획을 짤 수 있고, 둘째는 지도계획을 적절하게 구상할 수 있다.

본 연구에서는 오류의 범주를 5개로 분류하였으며, 각 범주에서의 일례를 학생들의 프로토콜을 이용하여 제시하면 다음과 같다.

1) 이해의 오류

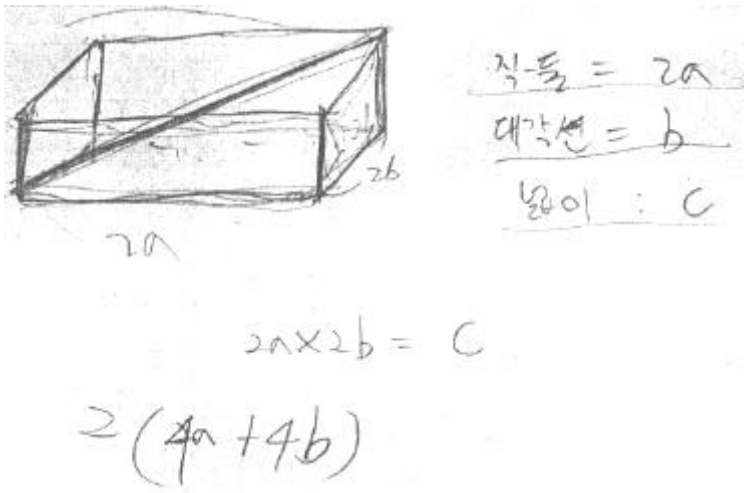
① 조건은 충분한지 여부를 모르는 경우

<예1> 문제10에서의 프로토콜



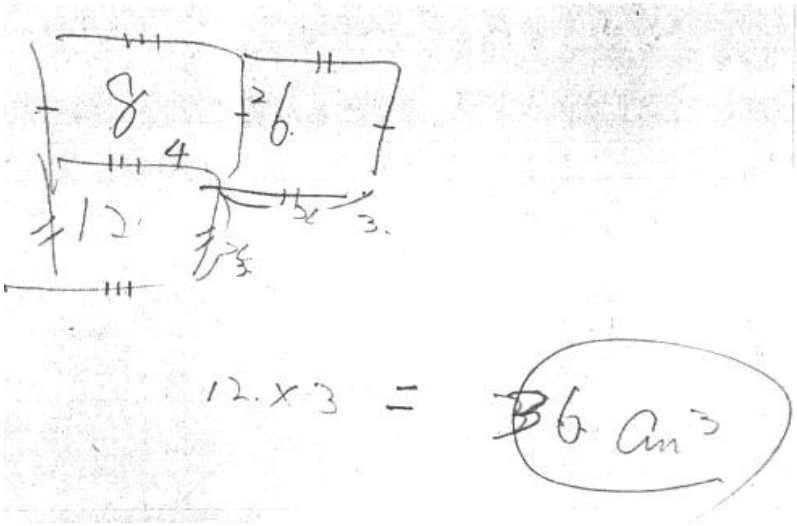
② 그림으로 그리기를 못하는 경우

<예2> 문제6에서의 프로토콜



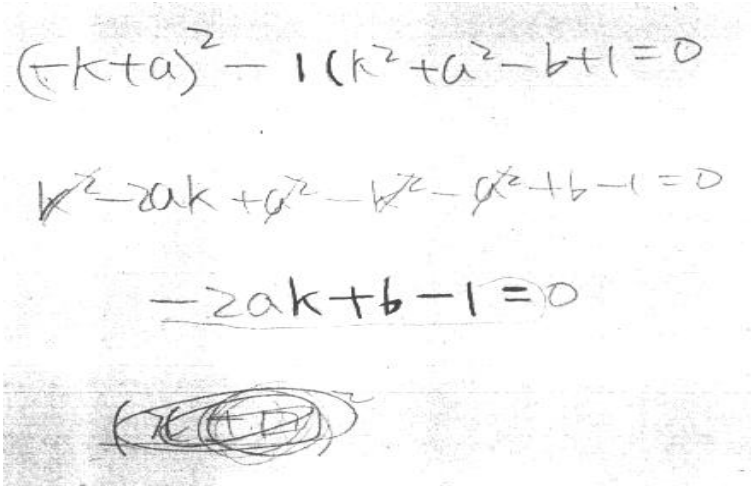
③ 적절한 기호 붙이기를 못하는 경우

<예3> 문제5에서의 프로토콜



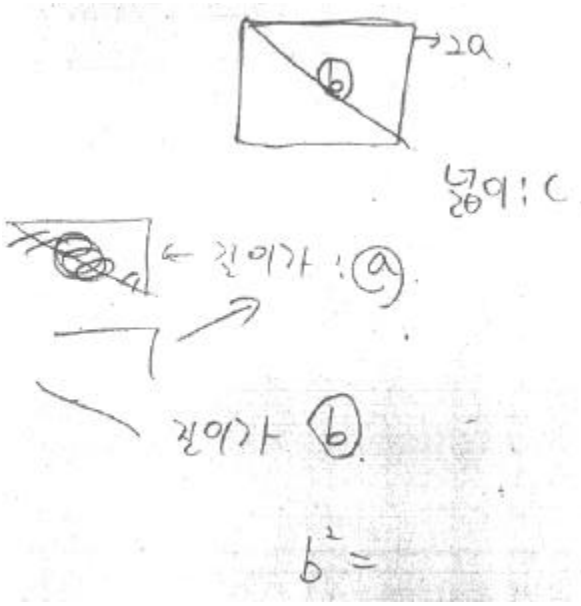
④ 조건을 여러 부분으로 분해하지 못하는 경우

<예4> 문제2에서의 프로토콜



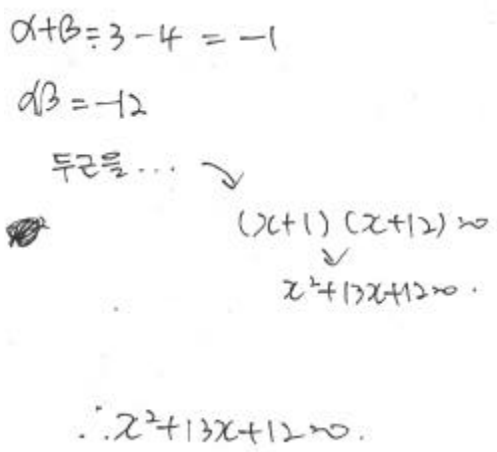
⑤ 자신의 말로 문제를 진술하지 못하는 경우

<예5> 문제6에서의 프로토콜



⑥ 조건이나 자료를 잘못 사용하는 경우

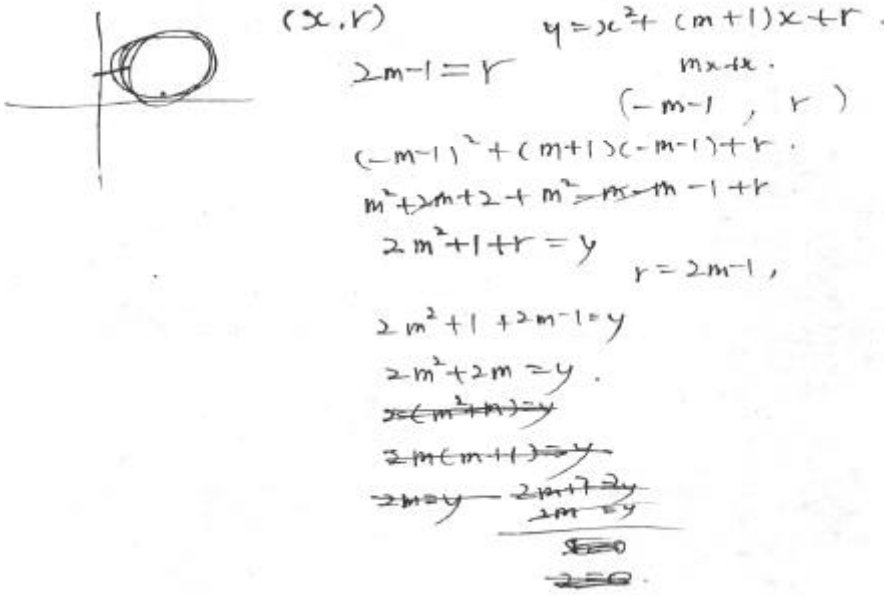
<예6> 문제7에서의 프로토콜



2) 전략선택의 오류

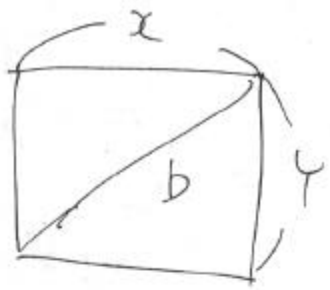
① 전에 풀어본 문제와 연관 짓기를 잘 못하는 경우

<예7> 문제3에서의 프로토콜



② 문제 풀이에 사용될 정의나 정리를 모르는 경우

<예8> 문제6에서의 프로토콜



$2x + 2y = 2a$

$x + y = a$

$\sqrt{x^2+y^2} = b$ - b.

$xy = c$ $a = -\frac{b}{a}$ $b = 0$

$ax^2+c^2=0$

$x+y = -\frac{b}{a}$ $c = \frac{c}{a}$

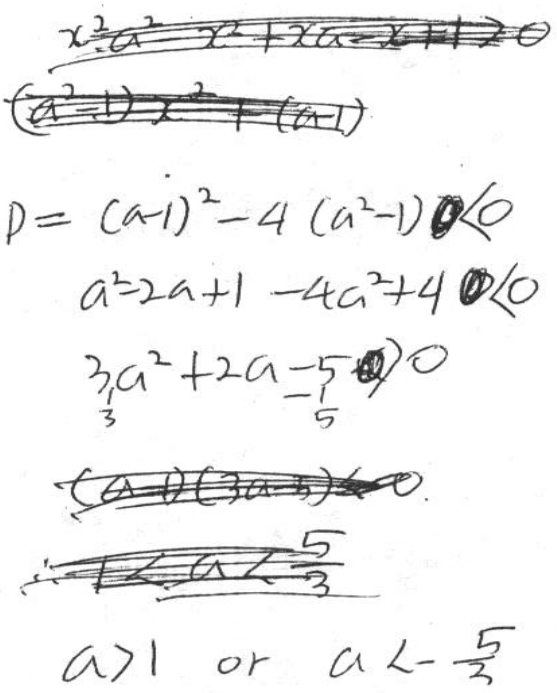
(b)

$x+y$ $xy = \frac{c}{a}$ $a = \frac{c^2}{a}$

ax^2+c^2 0

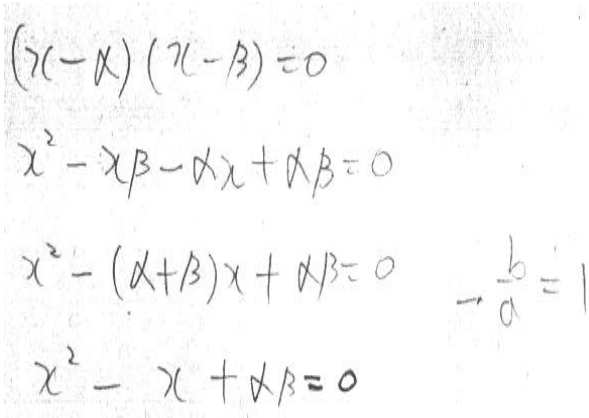
③ 문제에 주어진 자료와 조건을 모두 사용하지 않는 경우

<예9> 문제11에서의 프로토콜



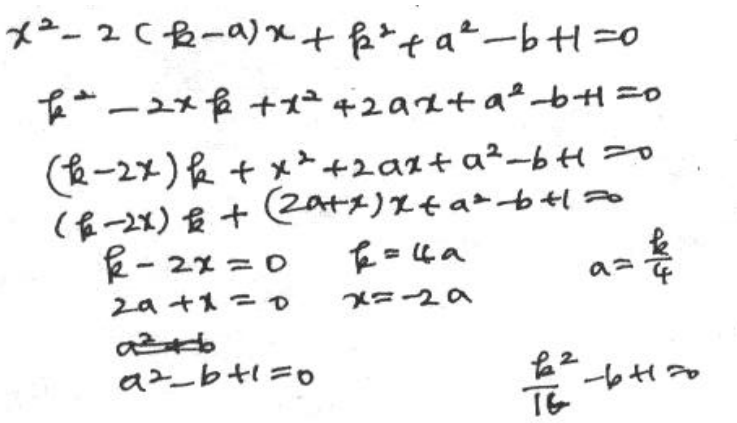
④ 주어진 문제를 일반화하거나 특수화하지 못하는 경우

<예10> 문제8에서의 프로토콜



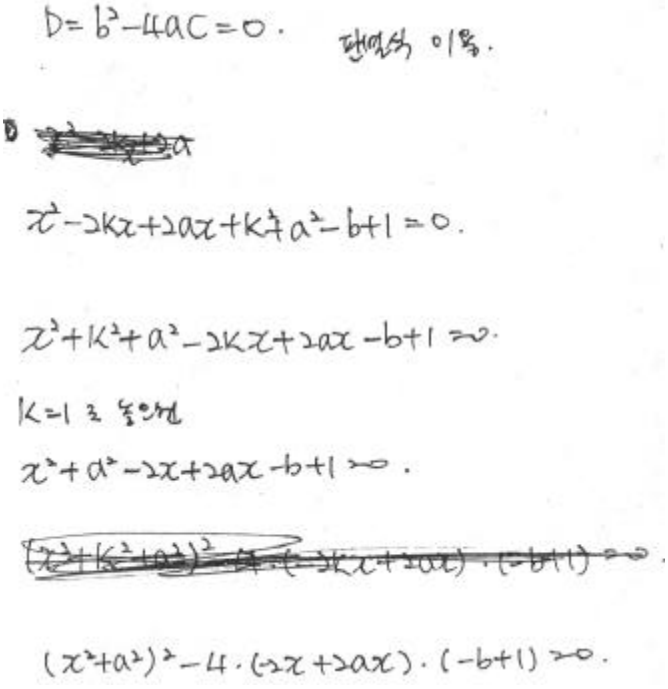
⑤ 문제에 포함된 핵심적 개념을 고려하지 못하는 경우

<예11> 문제2에서의 프로토콜



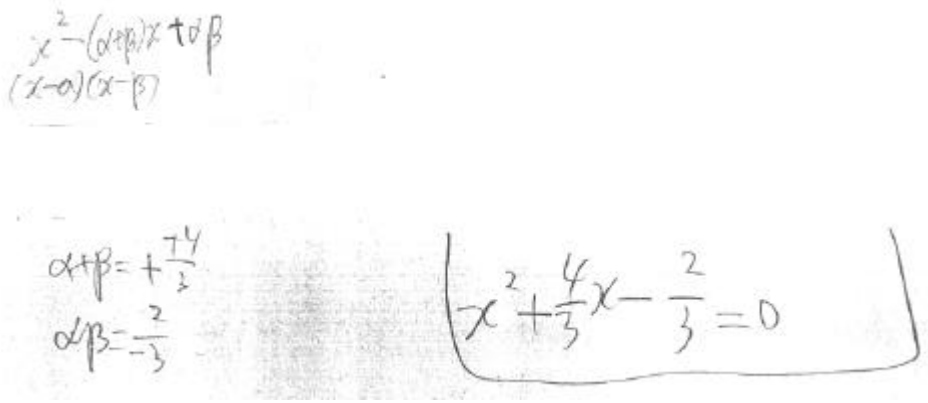
⑥ 필요에 따라 새로운 자료를 만들지 못하는 경우

<예12> 문제2에서의 프로토콜



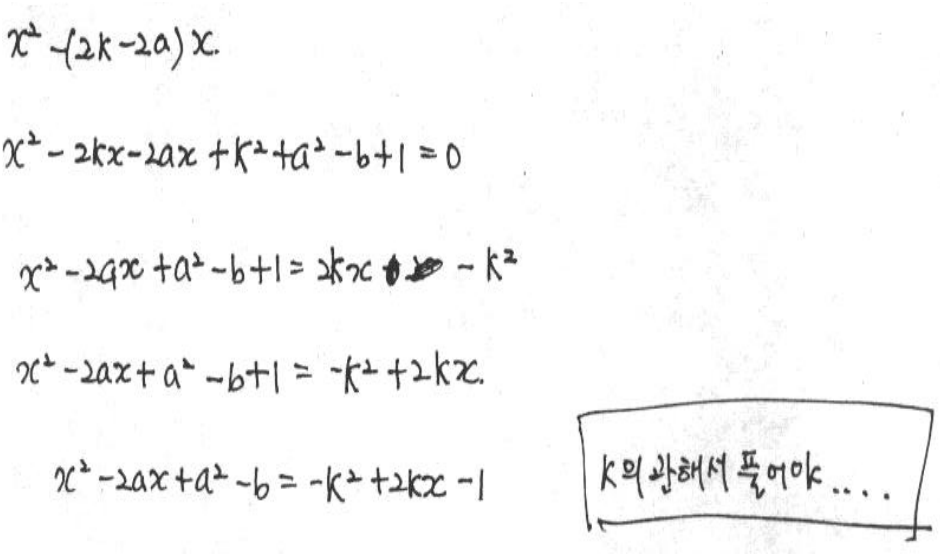
⑦ 부적절한 자료를 제거하지 못하는 경우

<예13> 문제7에서의 프로토콜



⑧ 문제해결의 장애물에 주목함으로써 요구되는 활동을 결정하지 못하는 경우

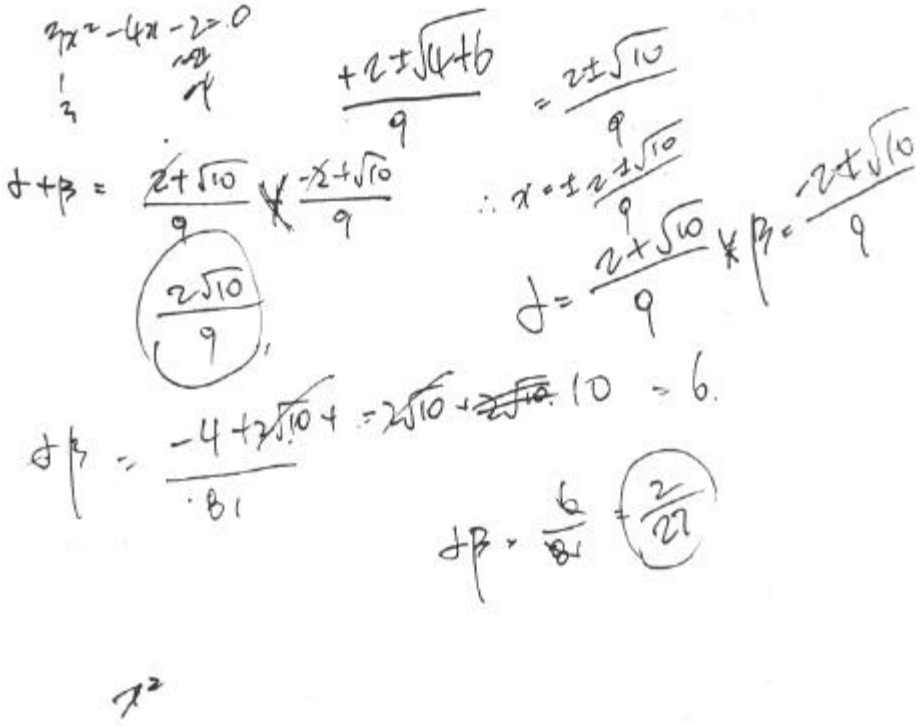
<예14> 문제2에서의 프로토콜



3) **처리기술의 오류**

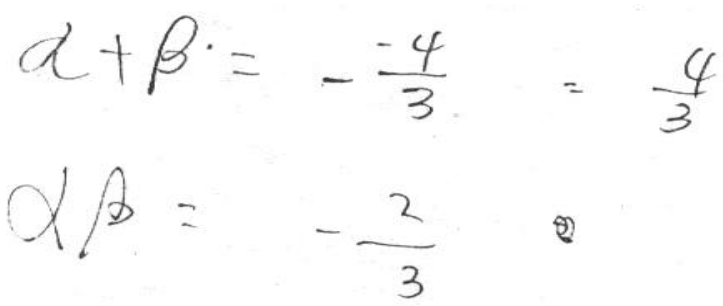
① 어떻게 풀어야 할지 난감해 하는 경우(알고리즘을 구성하지 못하는 경우)

＜예15＞ 문제7에서의 프로토콜



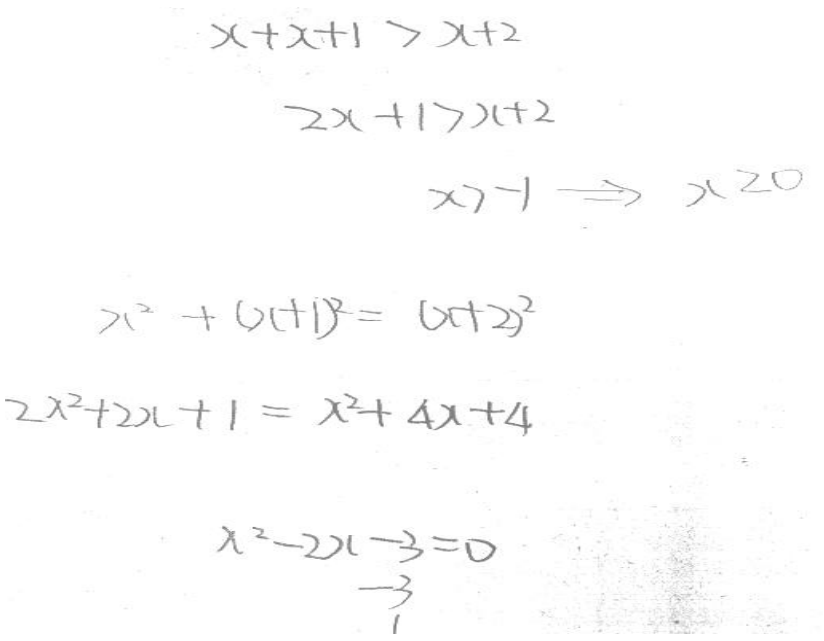
② 자료와 미지의 것 사이의 관련성을 찾지 못하는 경우

＜예16＞ 문제7에서의 프로토콜



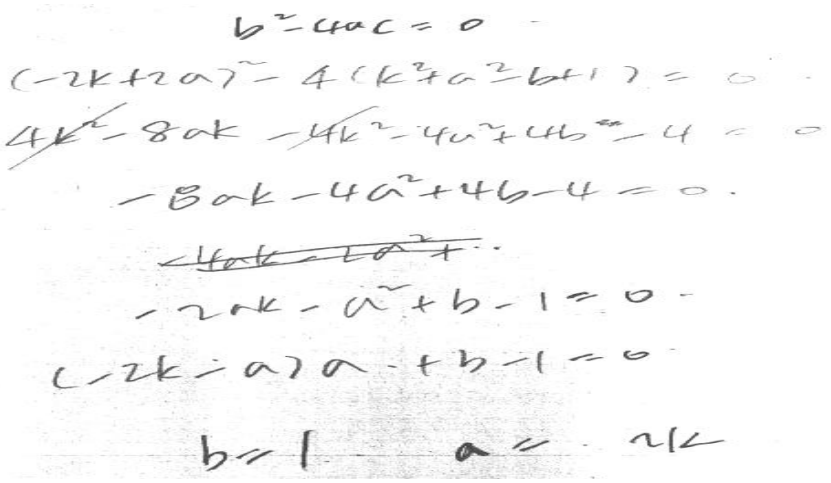
③ 문제에 주어진 자료와 조건에 의한 식이 잘못된 경우

<예17> 문제10에서의 프로토콜



④ 간단한 계산상의 오류를 범하는 경우

<예18> 문제2에서의 프로토콜



⑤ 문제 풀이 단계 설정이 옳지 않은 경우

<예19> 문제11에서의 프로토콜

$a^2-1>0$

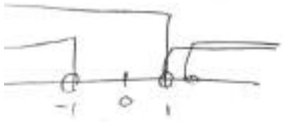
$(a+1)(a-1)>0$

$1<a$ $\quad a<-1$

$(a-1)^2-4(a^2-1)<0$

$a^2-2a+1-4a^2+4<0$

$-3a^2-2a+5<0$



$0<3a^2+2a-5$

$3 \quad -5$

$1 \quad -1$

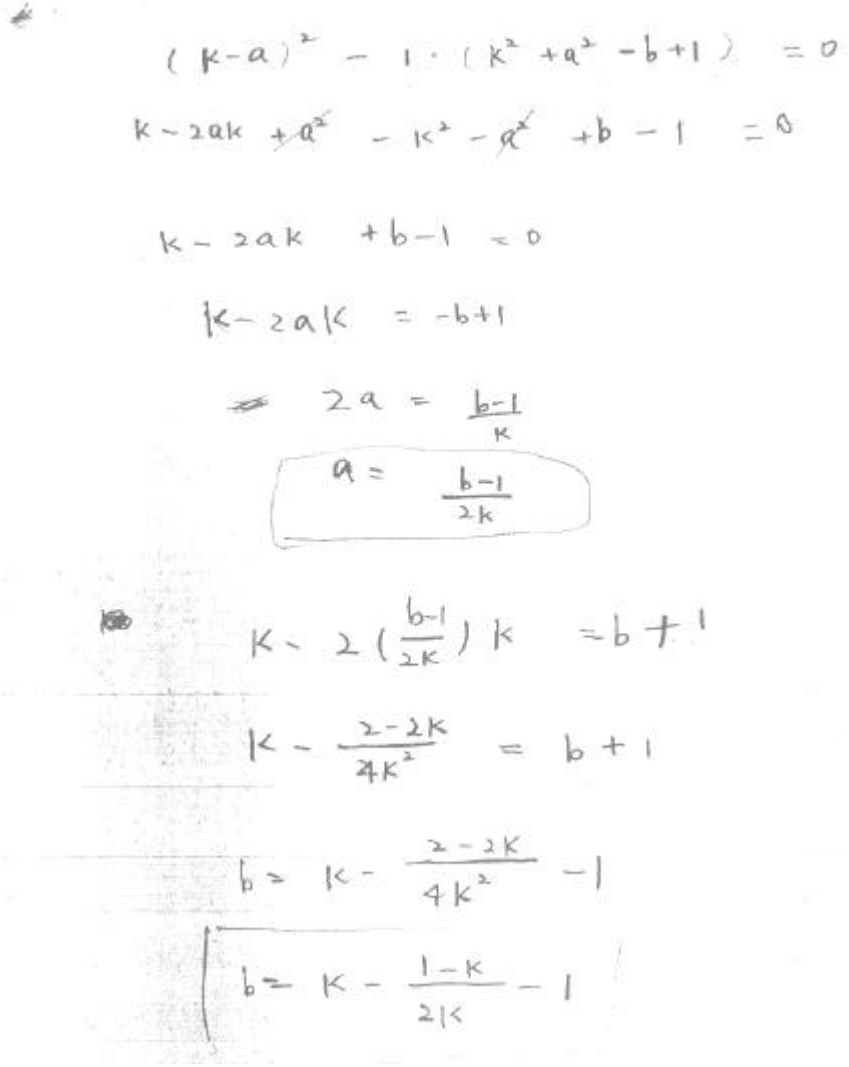
$0<(3a+5)(a-1)$

$\therefore \; x<-1$ $\quad \frac{5}{3}<x$

$x>\frac{5}{3}$ $\quad 1>$

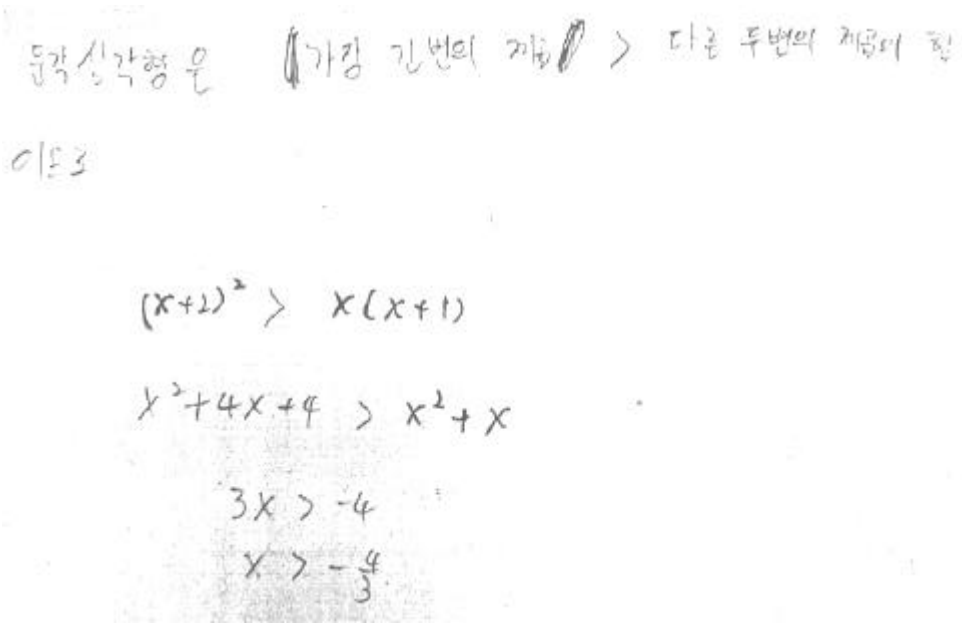
⑥ 풀이과정의 각 단계를 점검하지 못하는 경우

＜예20＞ 문제2에서의 프로토콜



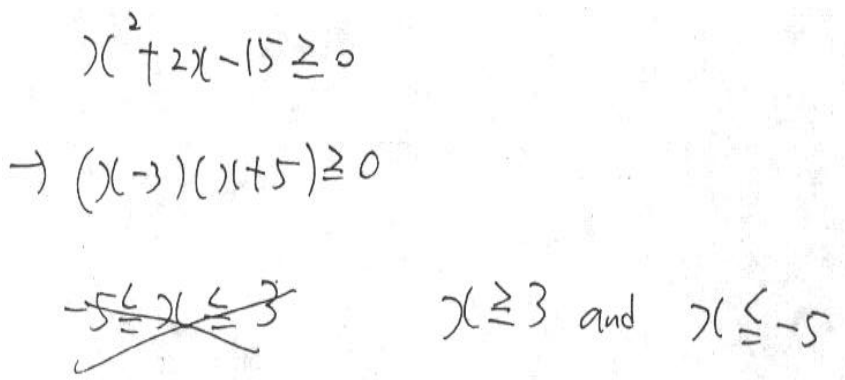
⑦ 논리적 서술이 부족한 경우

＜예21＞ 문제10에서의 프로토콜



⑧ 해결단계를 단축해서 발생된 오류

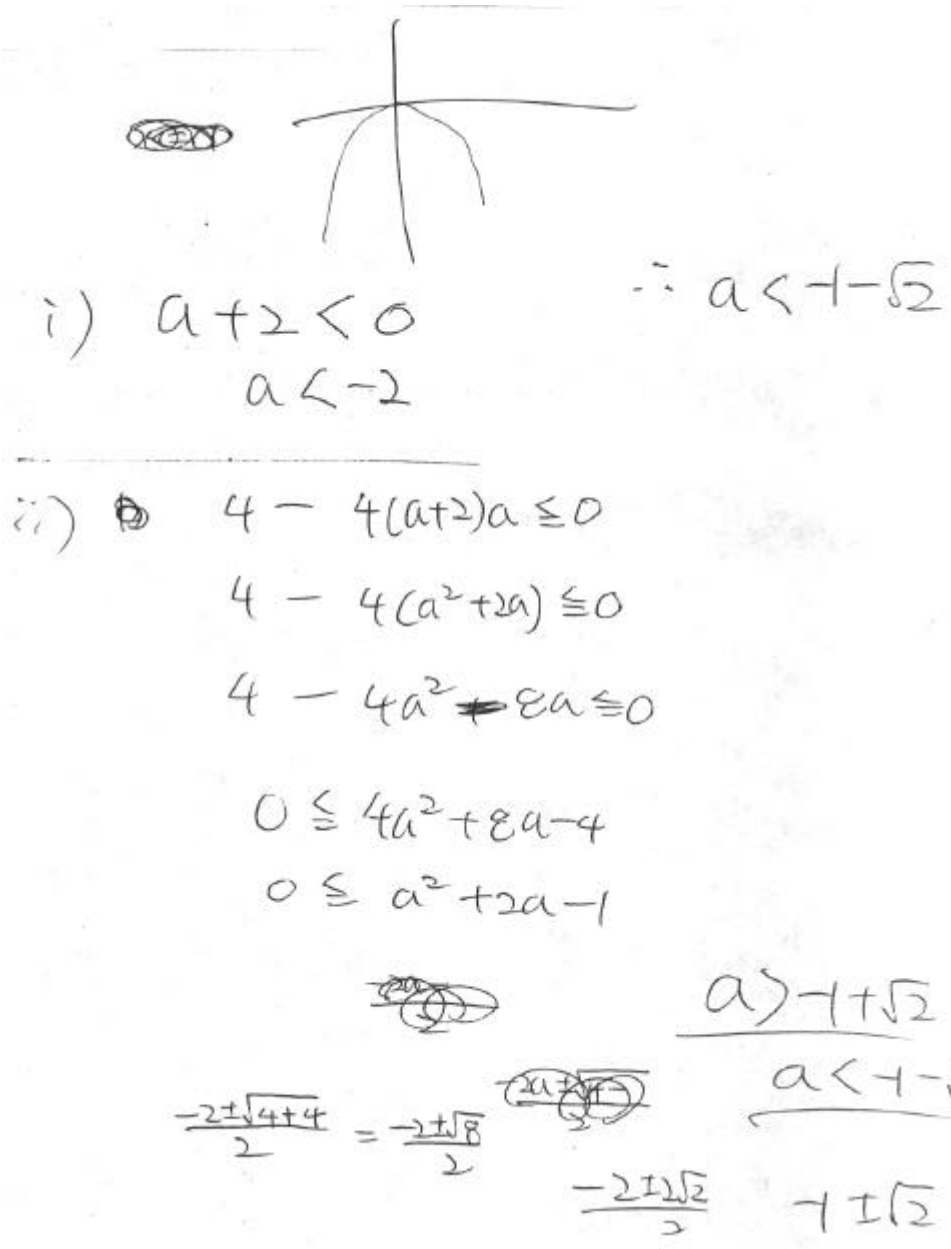
＜예22＞ 문제9에서의 프로토콜



4) 반성의 미 실행에서 오는 오류

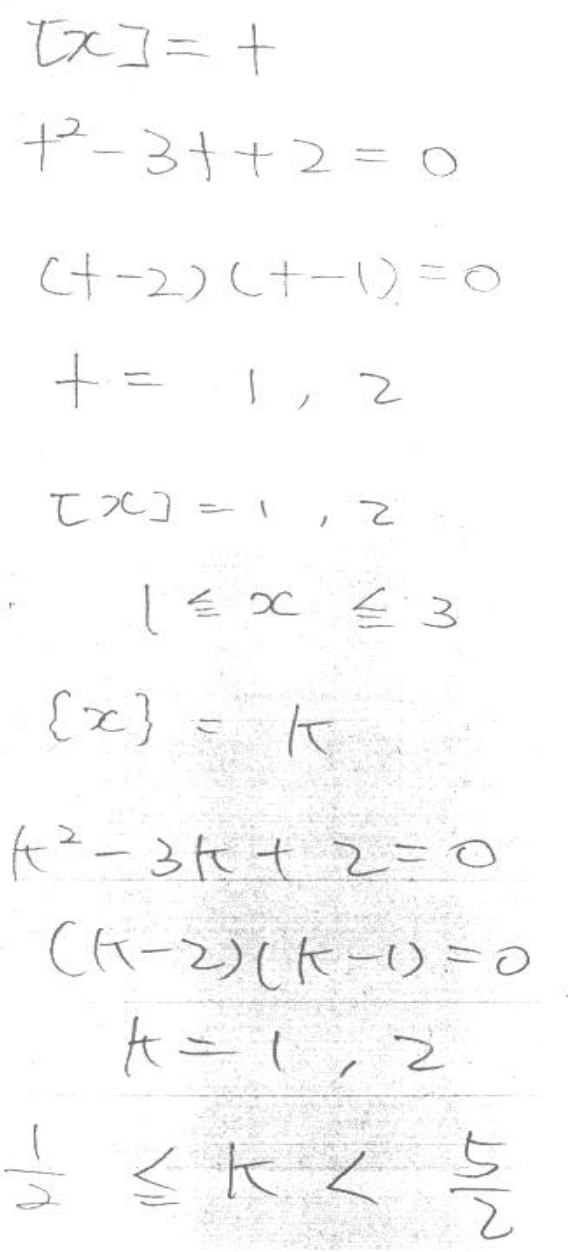
① 결과 점검을 하지 않는 경우

＜예23＞ 문제12에서의 프로토콜



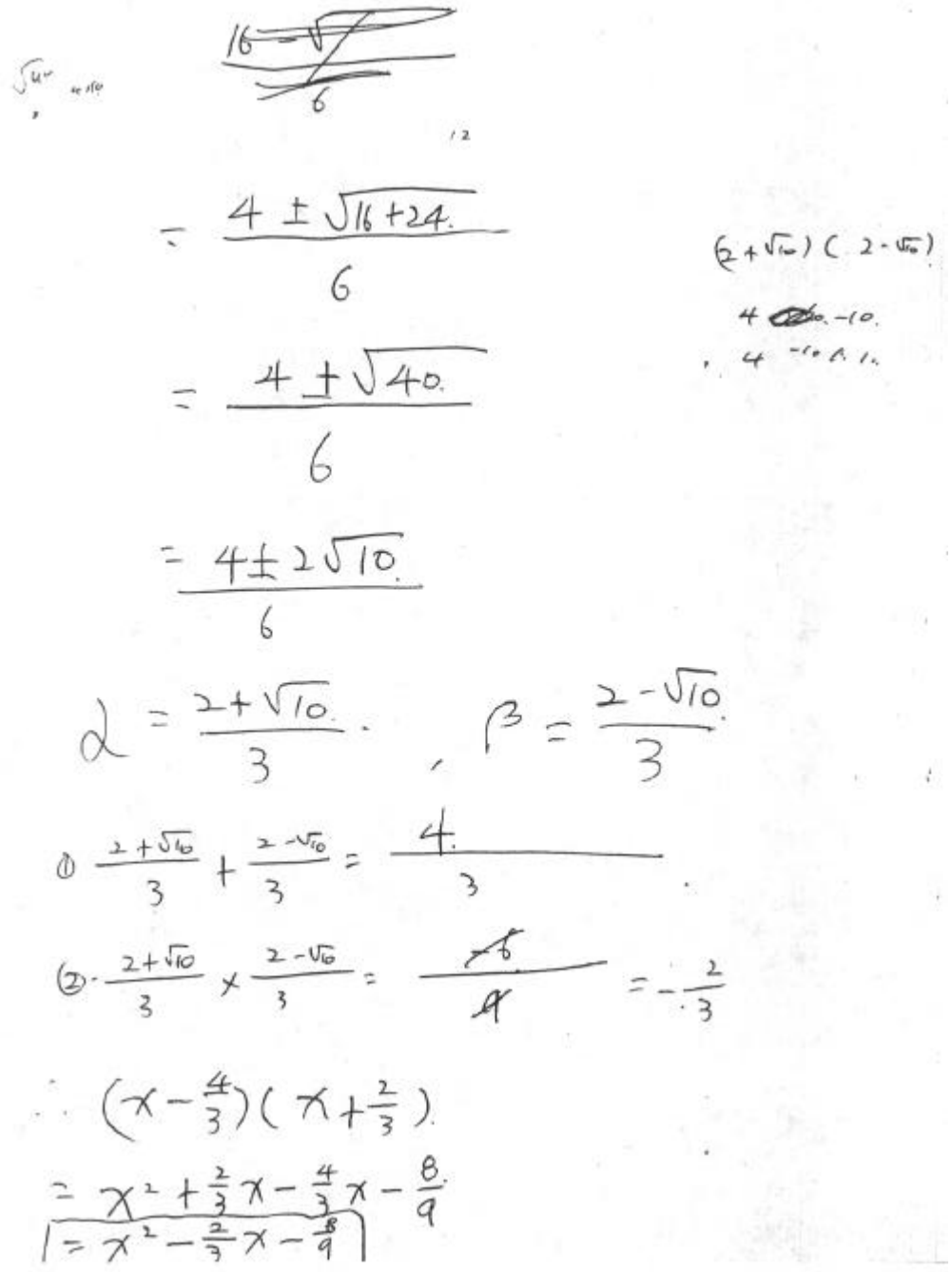
② 논의를 점검하지 않는 경우

<예24> 문제1에서의 프로토콜



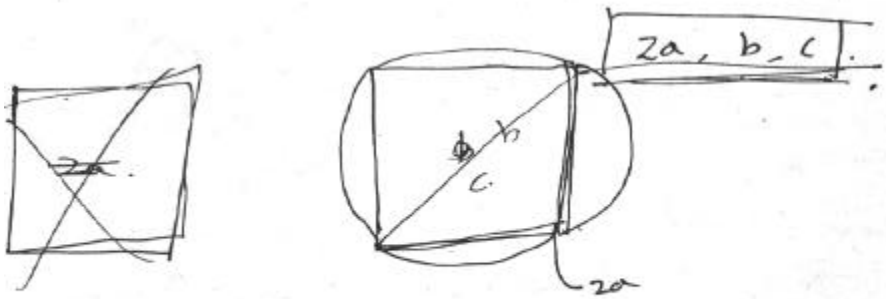
③ 다른 풀이 방법이 있는지 점검하지 않는 경우

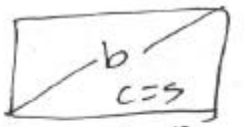
<예25> 문제7에서의 프로토콜



④ 문제를 재해석하기를 하지 않는 경우

＜예26＞ 문제6에서의 프로토콜





$ax+by=a$

$xy=c$

$(x-a)(x-c)$

$x^2-ax+c=0$

∴ 0.

정답은 0이다.

$x^2+2x-15\geq 0$

-3

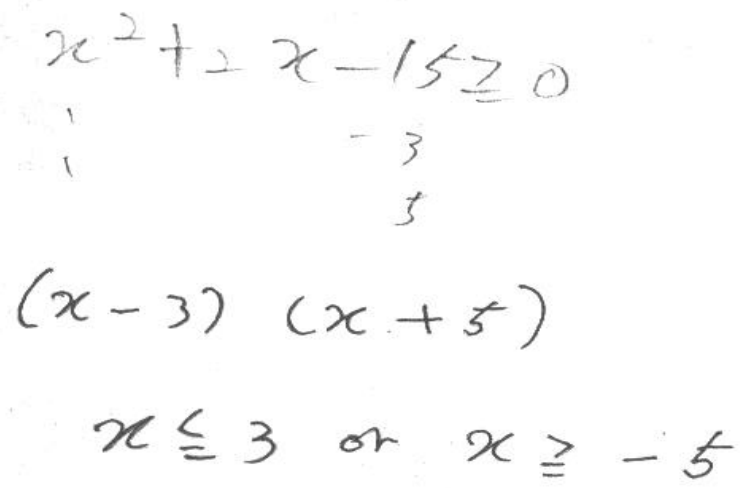
5

$(x-3)(x+5)$

$x\leq 3$ or $x\geq -5$

⑤ 결과를 해석하기를 하지 않는 경우

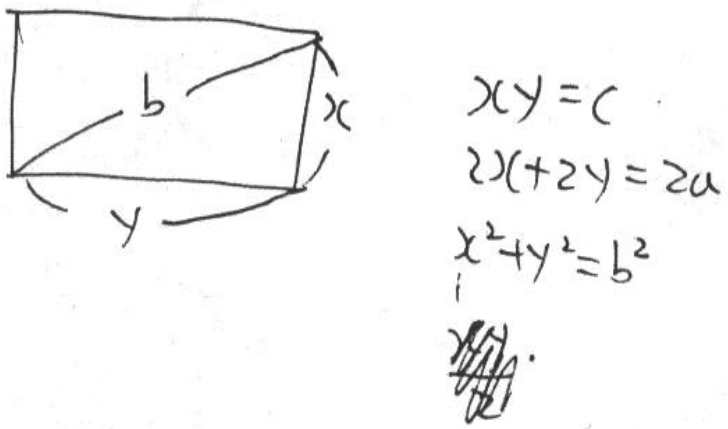
<예27> 문제9에서의 프로토콜



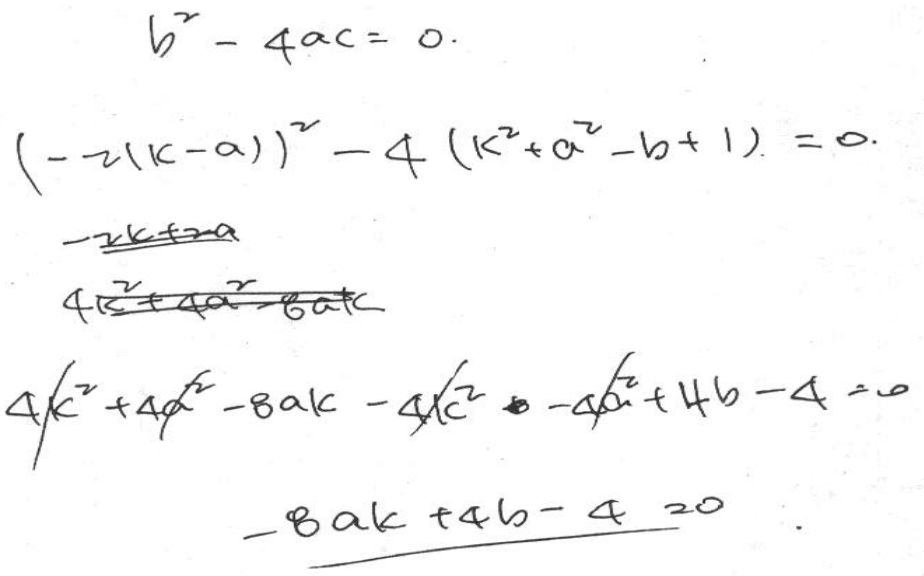
5) 애매 모호한 오류

① 학생들의 풀이과정이 현 단계까지는 옳으나 다음 단계가 생략된 경우, 또는 최종 답만 안 쓴 경우

<예28> 문제6에서의 프로토콜

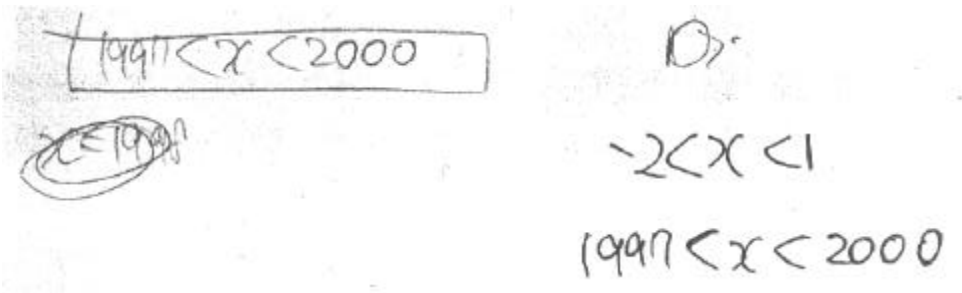


<예29> 문제2에서의 프로토콜



② 풀이과정 없이 어떤 수치적 값만을 답으로 제시한 경우

<예30> 문제13에서의 프로토콜



③ 학생들이 주어진 문항에 답을 하는 과정에서 글자가 흐릿하거나 애매 모호하여 연구자가 정확히 식별하기 난해한 경우

④ 학생들이 제시한 답을 보고 답하고자 하는 의도를 정확히 알 수 없는 경우