Chapter 12 Calibration

Photogrammetry

Absolute orientation; position and orientation of a range sensor in an absolute coord.
from the coord. of calibration points
Relative orientation; relative position and orientation b.t.w two cameras
from calibration points projections
Exterior orientation; position and orientation of a camera in an absolute coord.
from the projection of calibration points
Interior orientation; internal geometry (f, cx, cy, k)

assume; conjugate pairs are available

12.1 Coordinate systems

Scene coord. ; points in the scene
Camera coord. ; viewer centered representation
Image coord. ; scene point projected onto the image plane
Pixel coord. ; for the grid in the image array

pixel coord. (m,n)

Center of image array; $\hat{c}_x = \dfrac{m-1}{2}$ => estimated principal point

$\hat{c}_y = \dfrac{n-1}{2}$

(optical axis, principal axis)

image coord.

$$x' = s_x\left(j - \frac{m-1}{2}\right)$$

$$y' = -s_y\left(i - \frac{n-1}{2}\right)$$

s_x, s_y ; spacing b.t. row or column, respectively

12.2 Rigid body transformation

for a point P;

in coord. 1 , $p_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$

in coord. 2 , $p_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$

$$p_2 = Rp_1 + p_0$$

$R = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix}$; rotation matrix, p_0; position of origin in coord. 1 w.r.t coord. 2

Perspective transformation

(x, y, z) in a camera coord. is projected to a point (x′, y′) in image plane

$$x' = \frac{xf}{z}$$
$$y' = \frac{yf}{z}$$

12.2.1 Rotation matrices

* Right hand system

$$Rot(x,\Theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rot(y,\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rot(z,\Theta) = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

example;

$$v = Rot(z, 90)u$$
$$w = Rot(y, 90)v$$

=> $w = Rot(y,90)Rot(z,90)u$; Absolute transformation

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* Coordinate Frames

examples;

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* Relative transformation

Postmultiply a frame by a 2nd transform=> rotation/trans. w.r.t the 1st frame axis

Premultiply a frame by a transform => rotation/trans. w.r.t the base frame

* Left hand system

$$Rot(x,\omega)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\omega & \sin\omega & 0\\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$Rot(y,\phi)=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & -\sin\phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\phi & 0 & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad Rot(z,\kappa)=\begin{bmatrix}\cos\kappa & \sin\kappa & 0 & 0\\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Roll. Yaw. Pitch

$$R(z,\kappa)\cdot R(y,\phi)\cdot R(x,\omega)$$

$$=\begin{bmatrix}c\kappa & s\kappa & 0 & 0\\ -s\kappa & c\kappa & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\phi & 0 & -s\phi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ s\phi & 0 & c\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c\omega & s\omega & 0\\ 0 & -s\omega & c\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}c\kappa c\phi & s\kappa & -c\kappa s\phi & 0\\ -s\kappa c\phi & c\kappa & s\phi s\kappa & 0\\ s\phi & 0 & c\phi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c\omega & s\omega & 0\\ 0 & -s\omega & c\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}c\kappa c\phi & s\omega c\kappa s\phi + c\omega s\kappa & -c\kappa s\phi c\omega + s\omega s\kappa & 0\\ -c\phi s\kappa & -s\omega s\phi s\kappa + c\kappa c\omega & c\omega s\kappa s\phi + c\kappa s\omega & 0\\ s\phi & -s\omega c\phi & c\phi c\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Inverse of rotation matrix

$$R^T R = I$$

$$p_2 = Rp_1 + p_{2,0}$$

$$p_1 = R^T(p_2 - p_{2,0}) = R^T p_2 + p_{1,0}$$

12.8 Exterior Orientation

image plane coord. (x', y') <=> (x, y, z) in absolute coord.

P (x', y') define a ray from the center of projection passing through P (x', y')
Origin of the camera coord. ; center of projection
Position of Camera ; center of projection in absolute coord.

P (x', y') is (x', y', f) in 3d camera coord.

in camera coord. the parametric eq. of the ray passing through point

Exterior orientation problem;
obtain the relation from the P (x', y') to its ray in absolute coord.

in camera coord. the parametric eq. of the ray passing through point P (x', y')

$$(x, y, z) = t(x', y', f) \qquad , 0 < t < \infty$$

If, given P (x', y') and f, we can have the ray

Let $p = (x, y, z)^T$, $p' = (x', y', f)^T$

=> $p = tRp' + p_0$

Let $p_a = (x_a, y_a, z_a)^T \quad = \quad p_c = (x_c, y_c, z_c)^T$

$$\begin{aligned} x_c &= r_{xx}x_a + r_{xy}y_a + r_{xz}z_a + p_x \\ y_c &= r_{yx}x_a + r_{yy}y_a + r_{yz}z_a + p_y \\ z_c &= r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + p_z \end{aligned} \qquad (12.103\text{~}5)$$

$$\frac{x'}{f} = \frac{x_c}{z_c}, \quad \frac{y'}{f} = \frac{y_c}{z_c}$$

=>

$$\begin{aligned} \frac{x'}{f} &= \frac{r_{xx}x_a + r_{xy}y_a + r_{xz}z_a + p_x}{r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + p_z} \\ \frac{y'}{f} &= \frac{r_{yx}x_a + r_{yy}y_a + r_{yz}z_a + p_y}{r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + p_z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'(r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + p_z) - f(r_{xx}x_a + r_{xy}y_a + r_{xz}z_a + p_x) = 0 \\ y'(r_{zx}x_a + r_{zy}y_a + r_{zz}z_a + p_z) - f(r_{yx}x_a + r_{yy}y_a + r_{yz}z_a + p_y) = 0 \end{aligned}$$

6 calibration points => 12 eq's.

obtain r_{xx} $\cdots$

using $r_{xx} = \cdots$ etc, obtain ω, ϕ, κ by regression

12.9 Interior orientation

intrinsic parameters

Camera constant ; distance of the image plane from the center of projection

Principal point; (c_x, c_y)

Lens distortion coefficients;

scale factor

12.10 Camera calibration

pixel coord. (m,n)

Center of image array; $c_x = \frac{m-1}{2}$ => estimated principal point

$c_y = \frac{n-1}{2}$

(optical axis, principal axis)

image coord.

$$x' = \tau_x d_x (j - c_x)$$
$$y' = -d_y (i - c_y)$$

d_x, d_y ; pixel distance b.t. row or column, respectively

τ_x ; scale factor for distortion in the aspect ratio due to electronics

12.10.1 Simple method for Camera Calibration

Tsai [234]

Assumptions; the origin of absolute coord. is not in the field of view.

the projected origin is not close to the y axis

n calibration points,

(x_i, y_i, z_i) i=1, n in absolute coord. , $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i)$; uncorrected image coord.

Matrix A

$$a_i = (\widetilde{y}_i x_i, \widetilde{y}_i y_i, -\widetilde{x}_i x_i, -\widetilde{x}_i y_i, \widetilde{y}_i)$$

(1) 카메라 캘리브레이션

1개의 CCD 카메라로 3차원 공간에서의 물체의 영상을 얻었을 때, 2차원 영상으로 밖에 표현할 수 없을 뿐 아니라 좌표변환 등의 어려움이 있다. CCD 카메라에서 받은 영상의 각점들의 좌표 모두를 캘리브레이션하여 처리하는 데는 한계가 있어, Fig.1과 같이 실험장치를 고정하여 Fig.4와 같이 M개의 좌표만을 정하고(본 연구에서는 25개의 좌표를 정하였다.), 영상좌

표의 원점은 좌측 윗쪽코너를 정하여 카메라 캘리브레이션을 위한 영상좌표로 Fig.6, 7과 같이 얻은 영상에서 Fig.2 (a)의 방법으로 얻어진 점 P(u, v)와 캘리브레이션 판의 한점 P(x, y, z)를 동차좌표 변환행렬을 이용하여 식(1)과 같이 표현하고 이것을 캘리브레이션하면 카메라에서의 영상좌표 (u, v)에 대응한 좌표(x, y, z)를 구하는 A 행렬을 얻게 된다. 아래 식(1)에서 3행은 1개의 CCD 카메라를 가지고 캘리브레이션에서 잃어버린 행이기 때문에 제외시키고 식(2)과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} s*u \\ s*v \\ s*w \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} s*u \\ s*v \\ s*w \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

여기서 (x, y, z)는 카메라 시야에 존재하는 임의의 점p에 대한 센서 좌표계 O_s에서 표현된 좌표이고, a_{ij}는 카메라에 얻어진 각 영상점 사이의 관계를 결정하는 상수이다. 또한 (u, v)는 카메라에 얻어진 영상 좌표이며, s는 배율요소(scale factor) 이다. 식(2)에서 su,sv를 유도하면 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} su &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ sv &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ s &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{aligned} \tag{3}$$

식(3)에서 su,sv를 영상좌표로 나타내면 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{a_{11}*x + a_{12}*y + a_{13}*z + a_{14}}{a_{41}*x + a_{42}*y + a_{43}*z + a_{44}} \\ v &= \frac{a_{21}*x + a_{22}*y + a_{23}*z + a_{24}}{a_{41}*x + a_{42}*y + a_{43}*z + a_{44}} \end{aligned} \tag{4}$$

식(4)은 이미지면 에서 식(5)와 같이 표현이 된다.

$$\begin{aligned} (a_{11}-u*a_{41})*x+(a_{12}-u*a_{42})*y+(a_{13}-u*a_{43})*z+(a_{14}-u*a_{44}) &= 0 \\ (a_{21}-v*a_{41})*x+(a_{22}-v*a_{42})*y+(a_{23}-v*a_{43})*z+(a_{24}-v*a_{44}) &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

M개의 좌표를 식(6)과 같이 의사 역행렬에 의하여 a_{ij}를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1*x_1 & -u_1*y_1 & -u_{1*}z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & -v_1*x_1 & -v_1*y_1 & -v_{1*}z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & y_m & z_m & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_m*x_m & -u_m*y_m & -u_m*z_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_m & y_m & z_m & 1 & -v_m*x_m & -v_{m*}y_m & -v_m*z_m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \qquad (6)$$

위식에서 $x*A=u$ 이 되고, A를 구하면, $A=(x^Tx)^{-1}x^Tu$의 방법으로 캘리브레이션이 되고, $M=A*B=(x^Tx)^{-1}x^Tu*B$의 형태로 캘리브레이션하며, 2M*11개의 행렬은 의사 역행렬(pseado inverse)로 a_{ij}를 구할 수가 있다.

(2) 레이저 슬릿빔 캘리브레이션

CCD 카메라에 얻어진 영상으로는 3차원 좌표를 얻을 수가 없어서 슬 릿빔을 사용한다. 레이저 슬릿빔 평면 방정식을 얻기 위하여 Fig.8, 10과 같이 시험 판으로부터 750 mm, 600 mm, 450 mm의 위치에 z_s축을 따라 센서를

이동하면서 영상을 얻는다., Fig.1, 2(b)와 같이 레이저와 반사미러를 이용하여 이 영상에서 밝게 빛나는 부분의 P점들을 정하여 이에 대응되는 캘리브레이션판의 좌표 값들을 얻어 식(7)과 같이 레이저 슬릿빔 평면 방정식을 구할 수가 있다.

$$B_1*x+B_2*y+B_4+z=0 \qquad (7)$$

이 식을 행렬로 표시하면 식(8)과 같이 표현되고,

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} \qquad (8)$$

식(8)의 행렬을 다음과 같이 간략히 표현하고, 의사 역행열을 구하면 B 가 구해진다.

$$XB=-Z$$

$$B=(x^Tx)^{-1}x^T\ (-z)$$

(3) 센서 캘리브레이션

CCD 카메라에서 받은 영상의 각점들의 좌표 모두를 캘리브레이션하여 처리하는데는 한계가 있어, Fig.4와 같이 M개의 좌표만을 정하고 카메라 캘리브레이션의 식(5)와 레이저 캘리브레이션의 식(7)을 이용하여 캘리브레이션이식(9)로 표현이 된다.

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & 1 \\ a_{11}-u*a_{41} & a_{12}-u*a_{42} & a_{13}-u*a_{43} \\ a_{21}-v*a_{41} & a_{22}-v*a_{42} & a_{23}-v*a_{43} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_4 \\ u*a_{44}-a_{14} \\ v*a_{44}-a_{24} \end{bmatrix} \quad (7) \qquad (9)$$

식(9)의 행렬을 역으로 계산하여 정리하면 식(10)과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} s*x \\ s*y \\ s*z \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

이 행렬(matrix)은 CCD 카메라의 영상과 레이저의 투사교차선(projection crossing line)에 의해 만들어지며, 여기서 m_{ij} 로 이루어진 행렬을 센서행렬이라고 한다. 이식은 레이저 슬릿빔과 물체에 의하여 생성된 선에 있는 점 P들의 좌표 P(x,y,z)와 이에 대응된 영상좌표 P(u, v)의 관계이다. 따라서 Fig.8과 같이 카메라에 의하여 포착된 영상에서 레이저에 의하여 밝게 빛나는 점들의 P(u, v)를 식(10)에 대입하면 이에 대응되는 점들의 좌표가 센서좌표계(o_s)에 대하여 계산되고, Appendix 1에 의해 m_{ij}가 구해지게 된다.