제 3 장 실험 데이타의 평가 및 표현

3.1 서론

참값은 알 수 없다.
참값(true value); 이상적으로 정확한 값; 무한한 자릿수가 필요

측정오차가 어떤 값을 초과할 가능성을 평가할 수 있다.

예)
유량계에서 읽은 값의 95%는 1 ℓ/s 보다 작은 오차를 갖을 것이다.

=> 1 ℓ/s 이하의 오차를 가질 95%의 확실도(certainty)

3.2 오차의 공통유형

오차 (error)

$$\varepsilon = x_m - x_{true}$$

$$x_m - u \le x_{true} \le x_m + u \quad (n{:}1)$$

=> n회중 1회만 오차가 u보다 크다.

편의 (계통) 오차(bias, systematic)
정밀 (확률) 오차(precision, random)

정밀도(precision) ; 흐트러짐(dispersion)의 정도; 우연오차에 의함
정확도(accuracy); 흐트러짐의 쏠림정도; 계통적 오차에 의함
측정의 정도(精度); 정확도와 정밀도 또는 어느 하나를 말함

측정의 정확도; 오차율, 백분율
물리 및 공학; 0.1% ~ 1%
측정값의 유효숫자 3자리

3.2.1 오차의 분류

1) 오차의 발생종류

(1) 고유오차(bias, systematic 오차)
계기의 고유한 오차(器差)
고유오차에 의한 오차율이 적은 계기가 정밀한 것
- 교정(calibration) 오차
- 장비의 결함
- loading 오차; 접촉식 온도계
스프링 저울 식, load cell 식 저울
- 계의 resolution 한계
- 일정하게 재현되는 인위적인 오차

(2) 정밀오차 (precision, random, accident)
- 장비에 대한 교란
- 실험조건의 동요
- 불충분한 계측기의 감도
잡음; 열잡음, 雷放電 등의 자연계에 존재
기계의 진동, 형광등 등에 의한 인위적인 것 - 인공잡음
계기의 감도부족을 일으킴
계통성이 없고 랜덤(random)

(3) 부조리한(illegitimate) 오차;
실수(blunders), 계산착오
실험 후의 계산 오차

(4) 때로는 편의 오차 또는 때로는 정밀 오차
- 계기의 측정값의 drift, 주위 온도, 습도, 압력 등의 변화
온도보상장치 사용
- 계의 backlash, friction, hysteresis
- 실험자의 변동, 정의의 변동

- 대단히 큰 우연오차는 없다
- 작은 오차는 큰 오차보다 발생횟수가 많다
- 같은 크기의 +, - 오차는 거의 같은 비율로 발생

2) 오차에 대한 대책

계통적오차	correction - 이론적으로 보정 - 오차가 작은 측정기로 교정 (calibration) - 측정자의 숙련
우연오차	통계적인 방법으로 오차의 범위 파악

3.2.2 Digital 시스템에서 발생되는 오차

A/D 변환 과정

센서로부터 검출되는 정보 - 아나로그 (analog) 형태
analog signal -> digital signal

- 표본화 (sampling)
- 양자화 (quantization)
- 포화 (saturation)

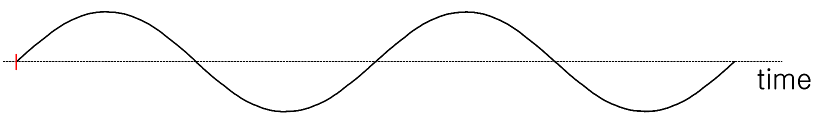
1) 표본화

시간 축에서 연속인 신호를 일정시간 간격으로 표본 추출

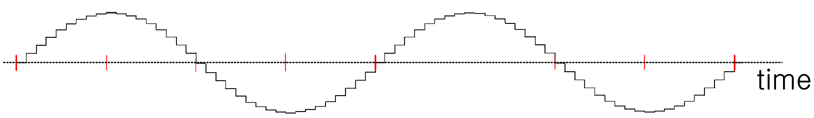
sample and holder 회로를 사용

Nyquist 정리;
sampling frequency f_s 는 대상 신호 속에 내포되어 있는 최고주파수 f_m 의 2배 이상
Aliasing effect;
sampling period 가 $\frac{1}{f_m}$ 보다 매우 길 때, 원 신호와 다른 형태로 보임.
실제는 $f_s > 10 * f_m$ 가 되도록 사용

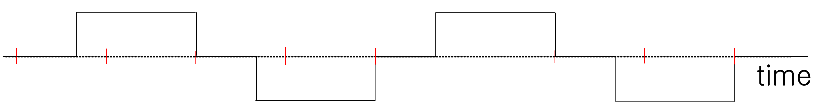
* Aliasing effect;
예) $f(\theta) = \sin(\theta)$



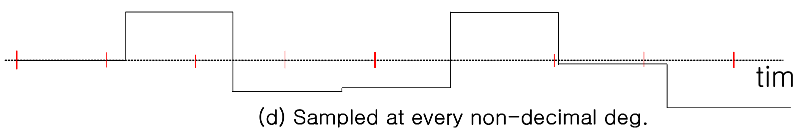
(a) Original signal



(b) Sampled at every 10 deg.



(c) Sampled at every 60 deg.



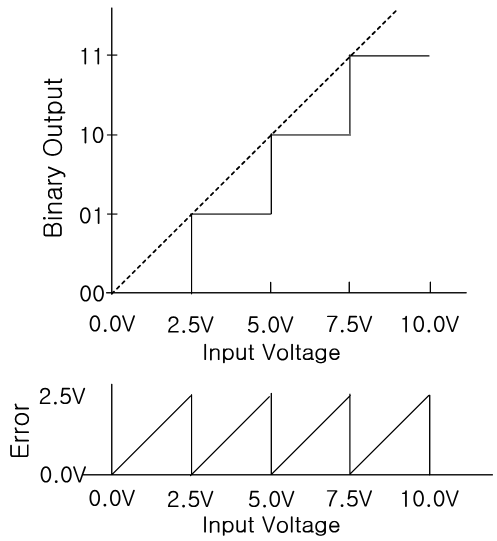
(d) Sampled at every non-decimal deg.

2) 양자화

크기가 연속인 신호를 일정 크기 간격으로 이산화

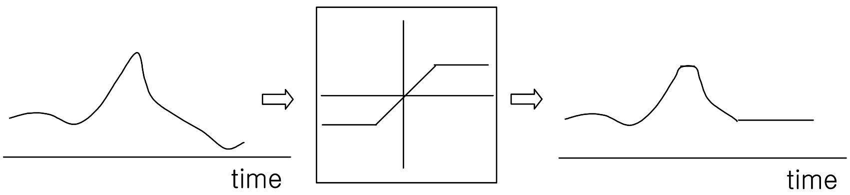
전체범위 (Full Scale) 를 몇 등분 하는가 ?

분해능; $\dfrac{FS}{2^n}$; n bit 2진 코드를 사용할 때



3) 포화 (saturation)

계측계가 다룰 수 있는 크기가 제한되어 있으므로, 그 범위를 초과하는 부분은 포화됨.

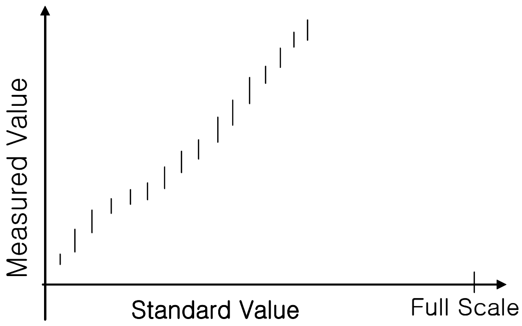


* Digital 시스템에서 발생되는 오차

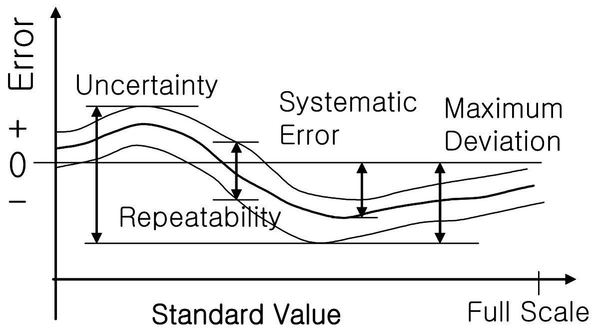
- sampling error
- quantization error
- saturation error

3.2.3 계기성능을 평가하는데 사용되는 용어

계측기를 전체 측정범위 (full scale)에서 교정할 경우 (표준시편으로 측정)



(a) 표준시편과 측정데이터



(b) 표준시편과 측정 오차 데이터

1) 정밀도 (precision/accuracy): 측정의 정도(精度)를 포괄적으로 의미함.

- repeatability(반복능)
  일정 값에 대한 출력값의 분산 정도. 일반적으로 6S

- uncertainty(불확실도)
  측정값의 전체 범위에서 발생될 수 있는 최대 오차 범위.
  repeatability와 systematic error를 포함하고 있음.

- resolution(분해능)
  계기의 판독눈금에서 결정될 수 있는 측정값 변화의 최소값

* 선형도 (Linearity): 최대편차 (maximum deviation)/(전체 측정범위)
  FS 오차 (Full scale error): 선형도*100%

* 감도(sensitivity)
  측정기가 어느 정도 예민한가 ?
  측정량 단위 변화 당 계기나 변환기의 출력의 변화

  감도 = 지시량의 변화/측정량의 변화

  - 측정기의 최소눈금(1 눈금) 이 지시하는 측정량
  - 지시량을 일정하게 할 때 측정량의 변화량

예) 변위센서: 0.5 V/mm
예) 디지털 저울
  최소눈금: 5 g

3.3 불확도의 소개

전체불확도; U_x

bias uncertainty; B_x

precision uncertainty; P_x

$$U_x = (B_x^2 + P_x^2)^{1/2}$$

예제 3.1) Mechanical measurements 6th ed. Beckwith etc, Pearson Prentice Hall, 한철호 역

고정 인장 하중을 받는 황동봉의 축 변형률을 스트레인게이지로 측정
일정한 조건하에서 30회 측정

평균 변형률: 520 μ-strain (520 ppm)
측정 분포의 통계 해석은 95% 신뢰도
정밀불확실도: $P_x = 21\mu\epsilon$
19:1 의 승산 (95%신뢰도)
편의 불확실도: $B_x = 29\mu\epsilon$

95% 적용범위에서 전체 불확실도
$U_x = (B_x^2 + P_x^2)^{1/2} = 36\mu\epsilon$ (95%)
즉,
19:1의 승산으로 참변형률이 $520 \pm 36\mu\epsilon$ 범위 내에 있다.
$484\mu\epsilon \le \epsilon \le 556\mu\epsilon$

3.4 정밀 불확실도의 평가

(1) 오차의 분포; 주어진 크기의 오차가 나타날 확률을 특성화
(2) 모집단 (population)으로부터 추출된 표본 (sample)
Gaussian, Normal 분포
작은 표본의 평균: average value
큰 모집단의 참값: true value

3.4.1 표본 대 모집단

구슬들의 생산 로트내의 제조 변화

표본 1, 표본 2, ...

정밀오차의 모집단: 무한대의 개 수

(1) 크기 n의 한 표본이 크기 p의 유한 모집단으로부터 추출된다.
$n \ll p$
(2) 유한 수의 항 p 가 불명확한 크기의 한 모집단이 가정된 것에서 무작위로 추출된다.
가정된 모집단의 특성들은 표본에서부터 추론된다.

3.4.2 확률분포 (Probability of distribution)

Probability: 모든 가능한 event들에 관하여 측정되는 특정한 event가 일어날 승산의 표현

(1) Gaussian (normal) probability distribution;

* 어떤 측정에서 여러 독립원이 동시에 전체 정밀오차 (total precision error)에 기여할 때 계측에서 가능한 오차의 모집단을 묘사.
* 오차의 원천들은 반드시 연관되지 않고 무작위적이며, 대략 동일한 크기
* 표준화된 z 분포

(2) Student's t-distribution;

* 소수의 표본 데이터만 유용할 때 gaussian 모집단의 평균값을 예측할 때 사용.

(3) χ^2-distribution;

* 모집단의 폭을 예측하고 표본의 균일성을 비교, 가정된 분포에 대한 적합도를 검토.

3.5 모집단 (population)에 기초한 이론

확률밀도함수 (PDF; Probability distribution density) ; $f(x)$

구간 $\triangle x = x_2 - x_1$ 내에 어떤 x 가 측정될 확률;

$$\mathrm{Prob}_{x_1 - x_2} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

측정에서 x 의 임의의 값이 관찰될 수 있는 확률: PDF 아래의 전 면적 즉 1.

Gaussian probability density function

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

x ; 특정한 측정의 크기
μ ; 전체 모집단의 평균
σ ; 전체 모집단의 표준편차

* average (평균)

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- μ 에 대해 가장 확률이 높은 값; 평균

* deviation (편차)

$$d = x - \mu$$

standard deviation; σ^2
아주 큰 표본의 제곱편차를 평균

$$\sigma \simeq \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + \cdots + \cdots + d_n^2}{n}}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

만일 모집단이 Gauss분포를 따를 때
어떤 1회의 측정값이 ±σ보다 작은 편차를 가질 확률; 68.3%
“ ±1.96σ ” ; 95%
“ ±3σ ” ; 99.73%

* outliers; 적정크기의 데이터에서는 있을 수 없는 점 (상한)

* z-분포 곡선
정규분포 곡선을 표준화

let $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

예제 3.2) Mehanical measurements 6th ed. Beckwith etc, Pearson Prentice Hall, 한철호 역

1) z=-1.43 과 z=+ 1.43 사이의 면적은 얼마인가 ?
2) 이 면적의 의미는 무엇인가?

해)
1) 표에서 z=+ 1.43일 때 0.4236을 읽고, 이것이 구하려는 면적의 반이기 때문에 전 면적은 2x0.4236=0.8472가 된다.

2) 그 의미는 정규분포를 따르는 데이터에 대해 $-1.43 < z < 1.43$ 범위에 데이터가 존재할 확률이 84.72%라는 것이다.

예제 3.3) Mechanical measurements 6th ed. Beckwith etc, Pearson Prentice Hall, 한철호 역

데이터의 90%를 포함할 z의 범위는 ?

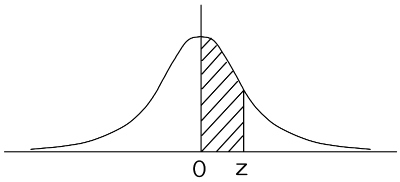
해)
0 과 z 사이에 90%/2 의 데이터가 놓일 z를 찾을 필요가 있다.
표에서 $z_{0.45} \approx 1.645$ (보간법 사용) 이다. 따라서 $z = (x-\mu)/\sigma$ 이기 때문에 모집단의 90%는 다음 범위에 있어야 한다.

$$(\mu - z_{0.45}\sigma) < x < (\mu + z_{0.45}\sigma)$$

또는

$$(\mu - 1.645\sigma) < x < (\mu + 1.645\sigma)$$

표준정규분포 곡선 아래의 면적



	z의 소수점 두 자리 위치									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1519	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000									

* $z \geq 3.90$ 에 대해 해당면적은 소수점 이하 4자리까지 0.5000 이다.

3.6 표본에 기초한 이론

실제 상황; 모집단이 아닌 모집단에서 추출된 표본

n 번 측정의 수학적 평균값

표본 평균: $$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

표본 표준편차:

$$S_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^{2+} \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - n\overline{x}^2}{n-1}}$$

	모집단	표 본
평 균	μ	$\overline{x}$
표준편차	σ	S_x

3.6.1 표본 추출의 예
(Mechanical measurements 6th ed. Beckwith etc, Pearson Prentice Hall, 한철호 역)

증기발생기를 12 시간 시험하는 동안에 입구압력은 4.00 MPa로 일정하게 유지해야 한다. 적절한 성능을 위하여 압력은 이 값에서 1%이상 변동해서는 안 된다.

입구압력은 100회 측정하였으며, 표 3.3에 기재되어있다. 디지털 게이지의 분해능은 0.001 MPa이며, 돗수 m은 기재된 압력을 중심으로 하여 ±0.005 MPa의 구간 내에 있는 판독값들의 개수이다.

$\overline{p} = 4.008$ MPa

400.77/100 = 4.008 MPa

$S_p = \sqrt{1858 \times 10^{-5}/99} = 0.014$ MPa

입력 판독값의 95%를 포함하는 간격

$\mu \pm 1.96\sigma \simeq \overline{p} \pm 1.96 S_p = 4.008 \pm 0.027$ MPa

3.981 ~ 4.035 MPa (93개)

1%이상 변할 가능성

1% -> 0.04 MPa ~ 2.86 Sp (2.86=0.04/0.014)

z=2.86 => Pz=2x0.4979=0.9958

오차율 = 0.0042; 약 1/200 확률

표 3.3 12시간 압력 시험의 결과

	압력 p, (MPa)	돗수, m	
	3.970	1	
	3.980	3	
	3.990	12	
	4.000	25	
	4.010	33	
	4.020	17	
	4.030	6	
	4.040	2	
	4.050	1	

3.6.2 큰 표본에 대한 신뢰구간 (Confidence intervals)

표본이 하나일 때; 평균값에 대한 단일 추정치

여러 개의 표본 집단으로부터 각각의 표본 평균 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n$ 을 구하면 이들도 가우스 분포를 갖을 것이다.

μ에 대한 근사값 $\bar{x}$ 에 대한 불확실도 ?

중심 극한 이론 (central limit theorem)

가정; 각 표본의 n 이 매우 크다.
평균값의 분포는 가우스 분포
표준편차; $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

* $\bar{x} \simeq \mu$ 라는 추정에 대한 불확실도

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

=> $\bar{x}$ 의 모든 판독값의 c% 가 존재하는 구간;

$$\mu \pm z_{c/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

c%의 신뢰도로 참평균 μ는 다음 구간에 존재

$$\bar{x} - z_{c/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{c/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$; c% confidence interval

σ는 알 수 없으나, n 이 클 때 즉 즉 $n \geq 30$일 경우, $\sigma \simeq S_x$로 간주한다.

$$\bar{x} - z_{c/2} \frac{S_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{c/2} \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

표본 평균의 표준오차 (standard error of the sample mean);

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \tag{3.20}$$

예제 3.4) Mechanical measurements 6th ed. Beckwith etc, Pearson Prentice Hall, 한철호 역

3.6.1의 측정데이타에 대하여 평균압력에 대한 99%의 신뢰구간을 결정

$z_{c/2} = z_{0.495} = 2.575$, $\sigma \simeq S_x$

$$\bar{p} - z_{0.495} \frac{S_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{p} + z_{0.495} \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

$$\mu_p = 4.008 \pm 2.575 \frac{0.014}{\sqrt{100}} \mathrm{MPa} = 4.008 \pm 0.0036 \mathrm{MPa} \ (99\%)$$

3.6.3 작은 표본에 대한 신뢰구간 (Confidence intervals)

표본이 작을 때 즉 $n \le 30$일 경우 μ에 대한 근사값 $\bar{x}$ 에 대한 불확실도 ?

Student t distribution 적용

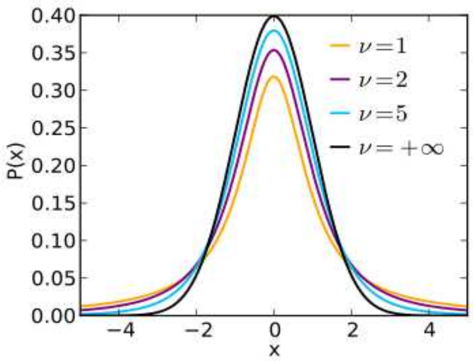
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S_x / \sqrt{n}}$$

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}(1+\frac{t^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

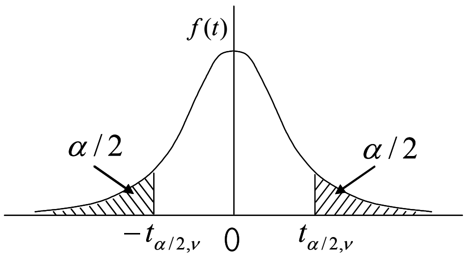
ν: Degree of freedom

Γ: Gamma function

student t 분포 확률밀도함수 (pdf)

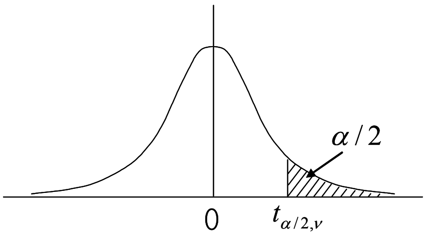


자유도 $\nu = n - 1$



$c\% = (1-\alpha)$ 의 신뢰도로 t값이 빗금치지 않은 구간에 놓인다.

표 3.5 Student t 분포표



ν	$t_{0.25,\nu}$	$t_{0.2,\nu}$	$t_{0.15,\nu}$	$t_{0.1,\nu}$	$t_{0.05,\nu}$	$t_{0.025,\nu}$	$t_{0.01,\nu}$	$t_{0.005,\nu}$	$t_{0.0025,\nu}$	$t_{0.001,\nu}$	$t_{0.0005,\nu}$	ν
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.3	318.3	636.6192	1
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.5991	2
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.9240	3
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.6103	4
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.8688	5
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.9588	6
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.4079	7
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.0413	8
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.7809	9
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.5869	10
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.4370	11
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.3178	12
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.2209	13
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.1405	14
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.0728	15
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015	16
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965	17
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922	18
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883	19
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850	20
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819	21
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792	22
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767	23
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745	24
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725	25
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707	26
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690	27
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674	28
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659	29
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646	30
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551	40
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496	50
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460	60
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416	80
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390	100
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373	120
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291	∞

표본이 작을 때 즉 $n \le 30$ 일 경우

$c\%$ 의 신뢰도로 참평균값 μ는 다음 구간 내에 있다.

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,\nu}\frac{S_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2,\nu}\frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

α : 유의수준 (level of significance)

정밀불확도:

$$P_x = t_{\alpha/2,\nu}\frac{S_x}{\sqrt{n}} \quad (c\%) \qquad (3.23)$$

예제 3.5) Mechanical measurements 6th ed. Beckwith etc, Pearson Prentice Hall, 한철호 역

표본 내의 12개 값들이 평균 $\bar{x}$와 표준편차 S_x 를 갖는다. 참평균 μ를 위한 95% 신뢰구간은 ?

요구유의수준 $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$ 이고, 자유도 $\nu = 11$ 이다.
t 의 필요값 $t_{\alpha/2,\nu} = t_{0.025,11} = 2.201$ (표 3.5로부터)
그러므로 95% 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.201\frac{S_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 2.201\frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

예제 3.6) Mechanical measurements 6th ed. Beckwith etc, Pearson Prentice Hall, 한철호 역

천칭형 우편저울에는 1/2, 1, 2, 4 온스 (oz)의 기계 가공된 황동추가 구비되어 있다. 제조업자가 품질 검토를 위하여 무작위로 1 온스 무게의 추 14개를 표본으로 선택하고 정밀저울로 그 무게를 달았더니 그 결과는 다음과 같았다.

1.08, 1.03, 0.96, 0.95, 1.04, 1.01, 0.98, 0.99, 1.05, 1.08, 0.97, 1.00, 0.98, 1.01

질문: 이 표본에 기초하여 모집단이 정규분포로 있다고 가정하고 모평균을 95% 신뢰도로 추정하라.

풀이: n=14에 대해, 표본 평균과 표준편차를 계산한다. 그 값들은 각각

$\bar{x} = 1.009\,\mathrm{oz}$, $\quad S_x = 0.04178$

표 3.5에서 $\nu = n - 1 = 13$ 에 대해 $t_{\alpha/2,\nu} = t_{0.025,13} = 2.160$ 을 찾을 수 있다. 양측신뢰구간을 계산함으로서 다음을 얻을 수 있다.

$$\pm t_{0.025,13}\frac{S_x}{\sqrt{n}} = \pm 2.160\frac{0.04178}{\sqrt{14}} = \pm 0.02412$$

따라서 95% 신뢰도에서 $\mu = 1.009 \pm 0.024\,\mathrm{oz}$ 이다.

3.10 불확실도의 전파(Propagation of Uncertainty)

$y = y(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
각 측정값들의 불확실도; $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$
y 의 불확실도 μ_y ?

불확실도가 충분히 작을 때 Taylor series 근사화

$$y[(x_1+\mu_1),(x_2+\mu_2),\cdots,(x_n+\mu_n)] = y(x_1,x_2,\cdots,x_n) + \mu_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + \mu_2\frac{\partial y}{\partial x_2} + \cdots + \mu_n\frac{\partial y}{\partial x_n} + \cdots$$

$$u_y = |y(x_1+\mu_1,\cdots) - y(x_1,\cdots,x_n)|$$
$$\leqq |u_1\frac{\partial y}{\partial x_1}| + |u_2\frac{\partial y}{\partial x_2}| + \cdots + |u_n\frac{\partial y}{\partial x_n}|$$
$$u_y = \sqrt{(u_1\frac{\partial y}{\partial x_1})^2 + (u_2\frac{\partial y}{\partial x_2})^2 + \cdots + (u_n\frac{\partial y}{\partial x_n})^2} \qquad \text{(n:1)}$$

예)

* $y = Ax_1 + Bx_2$

$$\triangle y = \frac{\partial\, y}{\partial\, x_1}\triangle x_1 + \frac{\partial\, y}{\partial\, x_2}\triangle x_2$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = A\ ,\ \ \frac{\partial y}{\partial x_2} = B$$
$$\frac{\triangle y}{y} = u_y,\ \ \frac{\triangle x_1}{x_1} = u_1,\ \ \frac{\triangle x_2}{x_2} = u_2$$
$$u_y = \sqrt{(A\,u_1)^2 + (B\,u_2)^2} \qquad (n:1)$$

* spring 저울

$$y = F/K,\ \ K = F/y$$
$$u_k = u_f\frac{1}{y} + F(-\frac{1}{y^2})u_y$$
$$\frac{u_k}{K} = \frac{u_F}{F} - \frac{u_y}{y}$$

=> $$\frac{u_k}{K} = [(\frac{u_F}{F})^2 + (\frac{u_y}{y})^2]^{\frac{1}{2}}$$

3.11 불확도 해석의 예

3.11.1 탄소저항기 (resistor)

10개의 저항을 선택하여 DMM으로 저항값을 측정하였다.

번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
저항값 ($k\Omega$)	18.12	17.95	18.17	18.45	16.24	17.82	16.28	16.32	17.91	15.98

(1) 저항기의 공칭값은 얼마인가?
그 값의 불확도는 얼마인가? (정밀불확도, 편의불확도를 고려)
(2) 공차를 추정할 수 있는가 ?

풀이:
(1)

$\overline{R} = 17.32\,k\Omega$; 공칭값
$S_R = 0.982\,k\Omega$

* 공칭값의 불확도 계산:

(a) 정밀불확도:
$\nu = 10-1 = 9$, $\alpha/2 = (1-0.95)/2 = 0.025$ 표 3.5 로부터
$t_{\alpha/2,\nu} = t_{0.025,9} = 2.262$

unbiased 모평균 μ_R 은

$$\mu_R = \overline{R} \pm t_{\alpha/2,\nu}\frac{S_R}{\sqrt{n}}$$
$$= 17.32 \pm 2.262\frac{0.982}{\sqrt{10}}$$
$$= 17.32 \pm 0.70\,k\Omega \quad (95\%)$$

=>정밀불확도: $P_R = 0.70\ k\Omega$

(b) 편의불확도(DMM 매뉴얼)
±(판독값의 0.5% + 전체눈금의 0.05% + 0.2Ω), 신뢰도 95%로 가정

DMM 전체 눈금 20$k\Omega$
판독값: 17.32$k\Omega$

±(판독값의 0.5% + 전체눈금의 0.05% + 0.2Ω)
= ±(17.32x0.005x1000 + 20x0.0005x1000 + 0.2)
= ±96.8Ω = ±0.10$k\Omega$

(c) 모평균에서 전체 불확도:
$U_x = (B_x^2 + P_x^2\ )^{1/2}$ = 0.71 $k\Omega$ 또는 약 ±4% (95%)

(2)

공차: $1.96\dfrac{\sigma_R}{\mu_R} \simeq 1.96\dfrac{S_R}{\overline{R}} = \dfrac{1.96 \cdot 0.982}{17.32} = 0.111$ => 11%

실제는 평균값의 불확도 및 표준편차 (분산)의 불확도 등이 있으므로
$\mu \pm 1.96\sigma$ 보다 큰 범위인 $\overline{R} \pm 3.532 S_R$ 이 된다.

실용적으로 시험된 저항기는 **공칭 $18k\Omega$ 10% 공차**를 갖는 것으로 한다.

3.11.2 유량계 교정의 예상 불확도

$$Q = KA_2\sqrt{2g_c/\rho}\,\sqrt{P_1 - P_2} \quad , \quad Q = W/(\rho t)$$

=> $K = \dfrac{4W}{\pi D^2 t}\sqrt{\dfrac{1}{2g_c\rho\triangle P}}$

$$\frac{u_k}{K} = [(\frac{u_w}{W})^2 + (2\frac{u_D}{D})^2 + (\frac{u_t}{t})^2 + (\frac{1}{2}\frac{u_\rho}{\rho})^2 + (\frac{1}{2}\frac{u_{\triangle P}}{\triangle P})^2]^{\frac{1}{2}}$$

K의 편의 불확실도;

$$\begin{aligned}\frac{B_k}{K} &= [(\frac{B_w}{W})^2 + (2\frac{B_D}{D})^2 + (\frac{B_t}{t})^2 + (\frac{1}{2}\frac{B_\rho}{\rho})^2 + (\frac{1}{2}\frac{B_{\triangle P}}{\triangle P})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(1)^2 + (2\text{x}0.2)^2 + (0)^2 + (\frac{1}{2}\text{x}0.02)^2 + (\frac{1}{2}\text{x}0.1)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= 1.08\%\end{aligned}$$

K의 표준편차;

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_k}{K} &= [(\frac{\sigma_w}{W})^2 + (2\frac{\sigma_D}{D})^2 + (\frac{\sigma_t}{t})^2 + (\frac{1}{2}\frac{\sigma_\rho}{\rho})^2 + (\frac{1}{2}\frac{\sigma_{\triangle P}}{\triangle P})^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(0.1)^2 + (2\text{x}0)^2 + (1)^2 + (\frac{1}{2}\text{x}0.002)^2 + (\frac{1}{2}\text{x}1)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= 1.12\%\end{aligned}$$

K 의 일회 표본 정밀불확도; (식 3.27)

$$\frac{P_k}{K} = 1.96\frac{\sigma_k}{K} = 1.96\text{x}0.0112 = 2.20\% \qquad (95\%)$$

K의 전체 불확실도;

$$\begin{aligned}\frac{U_k}{K} &= [(\frac{B_k}{K})^2 + (\frac{P_k}{K})^2]^{1/2} \\ &= [(0.0108)^2 + (0.0220)^2]^{1/2} \\ &= 2.45\% \qquad (95\%)\end{aligned}$$

불확도에 기여하는 인자 ?

시간, 중량

실험을 n회 반복; 정밀 불확도를 감소시킴.

3.12 실험계획 시 오차 최소화

실험오차를 최소화하기 위한 가장 좋은 시기는 계획단계

오차를 예방하기 위한 예방책

1) 두개의 값 사이의 작은 차이를 결정하기 위해 두 큰 수가 측정되는 것을 피하라.
2) 민감도를 개선하기 위해 신호강도를 증폭시키는 실험이나 센서를 설계하라.
3) 영위설계 (null design)을 구성하라. 즉 출력이 0을 기준으로 변화하도록 한다.
4) 데이터 축소과정처럼 큰 수정인자들이 적용되는 것을 피하라.
5) 계측계가 측정되는 변수에 미치는 영향을 최소화하라.
6) 교정과 연관된 편의오차들을 최소화하기 위해 개별요소보다는 전체 계를 교정하라.

3.13 데이터의 그래프 표현

그래프는 정보를 전달하고 주요한 특징을 묘사할 때 말이나 표보다 훨씬 효과적으로 사용되어질 것이다.

3.13.1 그래프를 만드는 일반 법칙

예)

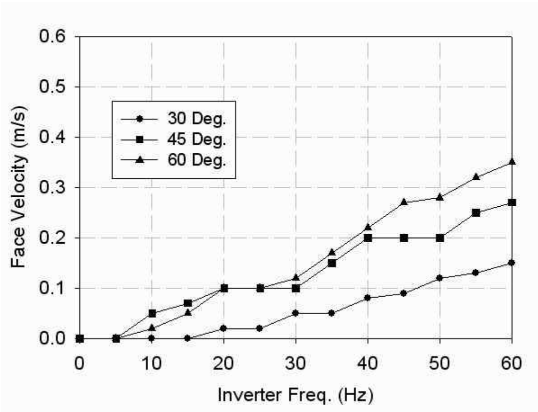


Fig. 9 Face Velocity with VVVF inverter frequency

3.14 곡선 맞춤과 최소 제곱법 (curve fitting and least square error)

1) 직선식에 의한 맞춤

data -> 직선

$$y = a + bx$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - y(x_i)]^2$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S^2}{\partial b} = 0$$

$$\sum \{ \mathrm{y_i} - (\mathrm{a} + \mathrm{b}\,\mathrm{x_i}) \} = 0$$
$$\sum \{ \mathrm{y_i} - (\mathrm{a} + \mathrm{b}\,\mathrm{x_i}) \}\ \mathrm{x_i} = 0$$

$$na + b\sum x_i = \sum y_i$$
$$a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum y_i x_i$$

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum y_i x_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{n\sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

2) 2차 다항식에 의한 맞춤

$$y = a + bx + cx^2$$

$$\sum y_i = na + b\sum x_i + c\sum x_i^2$$
$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3$$
$$\sum x_i^2 y_i = a\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4$$

3) log에 의한 맞춤

$$y = ax^b$$
$$\log y = \log a + b\log x$$

$$y = ac^{bx}$$
$$\log y = \log a + (b\log c)x$$

최소제곱법: only y_i 의 정밀오차만 고려

x_i 들은 오차가 없는 것으로 간주

최소제곱 결과에 따른 상관 계수 (Correlation coefficient); r

$$r^2 = \frac{y_m \text{ 에 관한 해석된 제곱변동}}{y_m \text{에 관한 전 제곱변동}}$$

$$y_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

x에 따른 y의 직선 변화로 야기한 해석된 (explained) 제곱 변동

$$\sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - y_m)^2$$

정밀 오차를 포함한 전 제곱 변동

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_m)^2 = S^2 + \sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - y_m)^2$$

$$r^2 = \frac{\sum (y(x_i) - y_m)^2}{S^2 + \sum (y(x_i) - y_m)^2}$$

제곱 편차가 정밀오차만에 기인 할 경우

완전맞춤; $S^2 \rightarrow 0$, $r^2 \rightarrow 1$
r 이 ±1 에 가까울수록 better fitting

맞춤품질의 더 양호한 지침; $(1 - r^2)^{1/2}$