7.2 3차원 직교좌표계와 벡터

7.2.1

7.2.2

7.2.3 inner product, outer product

예제 7.14)

예제 7.15)

예제 7.17)

7.3 3차원 공간 곡선의 정의

7.3.1 3 차원 공간 곡선의 표현방법

음함수식

$$g_1(x,y,z) = ax + by + cz - d = 0$$
$$g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

교선을 구할 때 어려움

매개변수식

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$$
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

예제 7.1.8 반경; 5, 피치;2 나선의 방정식

회전각; θ

$$x = 5\cos\theta, \quad y = 5\sin\theta$$
$$z = \frac{2}{2\pi}\theta$$
$$\boldsymbol{r}(\theta) = 5\cos\theta\boldsymbol{i} + 5\sin\theta\boldsymbol{j} + \frac{\theta}{\pi}\boldsymbol{k}$$

* 공간상의 자유곡선

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$
$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$$
$$z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1} t + \boldsymbol{a_2} t^2 + \cdots$$

* $t=t_1$ 에서 접선

$$\boldsymbol{t}(u) = \boldsymbol{r}(t_1) + u\dot{\boldsymbol{r}}(t_1)$$

예제 7.19 $\quad \boldsymbol{r}(\theta) = 5\cos\theta\boldsymbol{i} + 5\sin\theta\boldsymbol{j} + \frac{\theta}{\pi}\boldsymbol{k}$

$\theta = 0$ 에서 접선의 방정식은 ?

r(0) = (5,0,0)

$$\dot{\boldsymbol{r}}(\theta) = -5\sin\theta\boldsymbol{i} + 5\cos\theta\boldsymbol{j} + \frac{1}{\pi}\boldsymbol{k}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0,\ 5,\ \frac{1}{\pi})$$

=> $\boldsymbol{t}(u) = 5\boldsymbol{i} + 5u\boldsymbol{j} + (\frac{u}{\pi})\boldsymbol{k}$

7.3.2 공간상의 두 점을 잇는 곡선

(a) Ferguson curve;

직선으로 연결: $\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)u, \quad 0 \le u \le 1$

3차 곡선으로 연결:

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 u + \mathbf{a}_2 u^2 + \mathbf{a}_3 u^3 \quad , \ 0 \le u \le 1$$

$r_0 = a_0$

$r_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$

$t_0 = \dot{r}(0) = a_1$

$t_1 = \dot{r}(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$

$a_2 = 3(r_1 - r_0) - 2t_0 - t_1$

$a_3 = 2(r_0 - r_1) + t_0 + t_1$

$$\mathbf{r}(u) = UCS \quad ; \text{Ferguson curve}$$

$$U = [1 \ \ u \ \ u^2 \ \ u^3], \ 0 \le u \le 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ t_0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

(b) Bezier Curve;

$$
\begin{aligned}
r_0 &= b_0 \\
r_1 &= b_3 \\
t_0 &= 3(b_1 - b_0) \\
t_1 &= 3(b_3 - b_2)
\end{aligned}
$$

$$S = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ t_0 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_3 \\ 3b_1 - 3b_0 \\ 3b_3 - 3b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$0 \le u \le 1$

$$
\begin{aligned}
r(u) = UCS &= [1\ u\ u^2\ u^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \ 0 \le u \le 1 \\
&= [1\ u\ u^2\ u^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = UMR
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r(u) &= (1-u)^3 b_0 + 3u(1-u)^2 b_1 + 3u^2(1-u) b_2 + u^3 b_3 \quad \text{; 3차 Bezier곡선} \\
&= \sum_{i=0}^{3} \frac{3!}{(3-i)!i!} u^i (1-u)^{3-i} b_i
\end{aligned}
$$

$$r(u) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!} u^i (1-u)^{n-i} b_i \quad \text{; n차 Bezier곡선}$$

* composite (합성) Bezier 곡선

C^1 연속

(1) $b_3 = b_0{}'$

(2) $b_2, b_3, b_0{}', b_1{}'$ 가 일직선상에 존재

m개의 composite 곡선; 3m+1 개의 조정점

(c) 3차 B-Spline curve;

(1) b_0 와 b_2 의 중간점 M_0 , b_1 와 b_3 의 중간점 M_1
(2) b_1 과 M_0 의 1/3 에 r_0
(3) b_2 과 M_1 의 1/3 에 r_1
(4) 기울기 t_0 ; b_0 M_0 방향
(5) 기울기 t_1 ; M_1 b_3 방향

$$r_0 = (2b_1 + M_0)/3 = (2b_1 + (b_0 + b_2)/2)/3 = (b_0 + 4b_1 + b_2)/6$$
$$r_1 = (2b_2 + M_1)/3 = (b_1 + 4b_2 + b_3)/6$$
$$t_0 = (b_2 - b_0)/2 = (3b_2 - 3b_0)/6$$
$$t_1 = (b_3 - b_1)/2 = (3b_3 - 3b_1)/6$$

$$S = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ t_0 \\ t_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} b_0 + 4b_1 + b_2 \\ b_1 + 4b_2 + b_3 \\ 3b_2 - 3b_0 \\ 3b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

=> Ferguson식에 대입하면

$$r(u) = UCS \ = [1 \quad u \; u^2 \; u^3]\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \ 0 \le u \le 1$$
$$= UNR$$

$$r(u) = \frac{1}{6}(1 - 3u + 3u^2 - u^3)b_0 + \frac{1}{6}(4 - 6u^2 + u^3)b_1 + \frac{1}{6}(1 + 3u + 3u^2 - 3u^3)b_2 + \frac{1}{6}u^3 b_3 \ , \quad 0 \le u \le 1$$

* composite 곡선

C^2 연속
m개의 composite 곡선; m+3 개의 조정점

7.3.3 NURB 곡선

Non-Uniform Rational B-Spline

4 조정점
4 놋트벡터 (knot vector)
4 가중치 (weights)

* 놋트벡터 (knot vector)

t_0 - t_1 ; 가속
t_1 - t_2 ; 등속
t_2 - t_3 ; 감속

Bezier 곡선
가감속없이 ; $t_0=t_1$, $t_2=t_3$
Non-Uniform 곡선

B-Spline 곡선;
가속시간, 등속주행시간, 감속시간을 동일하게
$(t_1 - t_0) = (t_2 - t_1) = (t_3 - t_2)$
=> Uniform B-Spline 곡선

* 가중치

조정점 $\boldsymbol{b_i}$에 대하여 부여

$$\boldsymbol{r}(u) = \sum_{i=0}^{3} B_i(u)\boldsymbol{b_i}, \ 0 \le u \le 1$$

$$B_i(u) = \frac{3!}{(3-i)!i!} u^i (1-u)^{3-i}$$

$$\boldsymbol{r}(u) = \sum_{i=0}^{3} B_i(u)\omega_i \boldsymbol{b_i} / \sum_{i=0}^{3} B_i(u)\omega_i$$; rational Bezier curve => NURB

7.4 3차원 곡면 기하학

7.4.1 곡면의 개념

평면의 방정식

$$g(x,y,z) = ax + by + cz - d = 0,\ (a^2 + b^2 + c^2 = 1)$$

음함수, 곡면가공에는 불편

법선; $\boldsymbol{n} = \frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\boldsymbol{k}$

정의역 (u,v) 일 때

곡면의 방정식;

$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{x}(u,v)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{y}(u,v)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{z}(u,v)\boldsymbol{k}$; parametric form

법선 벡터;

$\boldsymbol{n} = \frac{\partial r(u,v)}{\partial u} X \frac{\partial r(u,v)}{\partial v}$; vector cross product

곡면가공에는 양함수 ($z = f(x,y)$) 방식이 편리

* 지구의 북반구의 표면

$x = a\cos v \cos u,\ y = a\cos v \sin u,\ z = a\sin v$

벡터형식 매개변수식;

$\boldsymbol{r}(u,v) = a\cos v \cos u\boldsymbol{i} + a\cos v \sin u\boldsymbol{j} + a\sin v\boldsymbol{k}$

$u; 0 \sim 360^o,\ v; 0 \sim 90^o$

음함수식;

$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

양함수식;

$z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, z>0

음함수식;

$g(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$

법선; $\boldsymbol{n} = \frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\boldsymbol{k}$

* 매개변수에 의한 평면의 정의 방법

$\boldsymbol{r}_0$; 평면상의 한점

$\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2$; 평면상의 임의의 2 벡터

$r(u,v) = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{n}_1 + v\boldsymbol{n}_2$

예제 7.22 (예제 7.17 참조 - 비매개변수식)

$r_0(1,1,1)$, $r_1(2,0,0)$, $r_2(0,2,0)$ 을 지나는 평면의 방정식

=>

평면상의 2 벡터;

$n_1 = r_1 - r_0 = (1,-1,-1)$

$n_2 = r_2 - r_0 = (1,\ \ 1,-1)$

평면의 방정식;

$$r(u,v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} v$$

법선벡터;

$n = n_1 \times n_2 = 2i + 2j = (2,2,0)$

$r \cdot n = r_0 \cdot n$ 이므로

$x + y - 2 = 0$; 음함수 평면의 방정식

* 등경곡선 (isoparametric curve)

곡선식: $r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$

하나의 매개변수를 고정

let $u = u_0$, $r(u_0, v)$; 등경곡선

등경곡선에 대한 접선벡터;

$$r_u(u,v_0) = \frac{\partial r(u,v_0)}{\partial u}, \quad r_v(u_0,v) = \frac{\partial r(u_0,v)}{\partial v}$$

=> $r_0 = r(u_0,v_0)$ 에서의 접선벡터

let $u = u(t)$, $v = v(t)$; t 만의 함수로 나타내면

$\dot{r}(t) = dr(u(t),v(t))/dt$

접평면; 점 P에서 r_u , r_v , $\dot{r}(t)$ 는 한 평면에 존재

법선벡터; 접평면에 수직인 벡터 ; $n = r_u \times r_v$; 방향성이 있음.

7.4.2 음함수 다항식 곡면

해석적 곡면 (analytic surface)
자유곡면 (free formed surface)

2차 곡면

- 타원체면(ellipsoid) ; $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$

- 일엽쌍곡면(hyperboloid of one sheet) ; $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$

- 이엽쌍곡면(hyperboloid of two sheet) ; $x^2/a^2-y^2/b^2-z^2/c^2=1$

- 타원형 포물면 (elliptic paraboloid) ; $x^2/a^2+y^2/b^2-z=0$

- 쌍곡 포물면 (hyperbolic paraboloid) ; $x^2/a^2-y^2/b^2-z=0$

- 2차 추면 (quadratic cone) ; $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$

매개변수식

- 타원체면(ellipsoid) ;

$$x=a\sin v\cos u$$
$$y=b\sin v\sin u$$
$$z=c\cos v$$

- 일엽쌍곡면(hyperboloid of one sheet) ;

$$x=a\cos u\cosh v$$
$$y=b\sin u\cosh v$$
$$z=c\sinh v$$

- 이엽쌍곡면(hyperboloid of two sheet) ;

$$x=a\cosh v$$
$$y=b\cos u\ \sinh v$$
$$z=c\sin u\ \sinh v$$

7.4.3 매개변수 다항식의 곡면

* 점들의 데이터가 주어졌을 때
일반식;

$$r(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, u^i v^j; \quad 0 \le u, v \le 1$$

가장 간단한 형태; $r(u,v) = a_{00} + a_{10}u + a_{01}v$ 곡면

m=n=3 ; bicubic polynomial equation (양 3차 다항식)

matrix 형태;

$$r(u,v) = [1\ u\ u^2\ u^3]\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$= UAV^T$$

P_{ij} 와 (u_i, v_j)가 주어졌을 때 계수 a_{ij}

$$P_{ij} = r(u_i, v_j); \; i = 0, \cdots, 3, \; j = 0, \cdots, 3$$

곡면보간(surface interpolation); 점의 수와 차수가 같을 때
곡면근사(surface approximation); 점의 수보다 차수가 적을 때
* 차수를 높이는 방법보다 곡면을 patch하는 방법을 사용

대화식 CAD ; 조정점(control point)을 지정하여 설계

Bernstein-Bezier 다항식;

$$r(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} b_{ij\,m} C_{i\,n} C_j u^i (1-u)^{m-i} v^j (1-v)^{n-j}; \quad 0 \le u, v \le 1$$

$${}_mC_i = \frac{m!}{(m-i)!\, i!}$$

Matrix 형태

$$r(u,v) = UMBM^TV^T$$

$$U = [1\ \ u\ \ u^2\ \ u^3], \quad V = [1\ \ v\ \ v^2\ \ v^3]$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

위의 곡면은 특성다면체 내부에 존재
m=n=3인 단위곡면을 연결하는 (patch)방법을 사용 (특별한 경우 m=n=5)

예제 7.25)

7.4.4 곡선의 이동궤적을 나타내는 곡면

sweep 방식

* 단면곡선 (cross -section curve)을 일정한 축에 관하여 회전 이동, 또는 직선이동

$$x(u,\theta) = d(u)\cos\theta,\ \ y(u,\theta) = d(u)\sin\theta$$
$$\boldsymbol{r}(u,\theta) = d(u)\cos\theta\boldsymbol{i} + d(u)\sin\theta\boldsymbol{j} + z(u)\boldsymbol{k}$$

* 이동곡선 $\boldsymbol{r}_g(u)$ 가 안내곡선 (director curve) $\boldsymbol{r}_d(v)$를 미끄러져 이동

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{r}_g(u) + \boldsymbol{r}_d(v) - \boldsymbol{r}_d(v_0)$$