7 곡면모델링을 위한 기초수학

7.1 2차원 곡선기하학

7.1.1 직선의 방정식

* $y = mx + d$

  $m = \tan\theta$

  =>

* $x\cos\theta + y\sin\theta - c = 0$

  방향여현; $(\cos\theta,\ \sin\theta)$; 단위법선벡터

  양함수(explicit form); $y = f(x)$

  음함수(implicit form); $g(x,y) = 0$

* $(x_1,\ y_1)$을 지나며, 기울기 m인 직선

  $y = m(x - x_1) + y_1$

* 매개변수식(parametric eq.)

  $x = x_1 + at$, $y = y_1 + bt$

7.1.2 원의 방정식

* $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

* $y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \le x \le r$

  $y = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \le x \le r$

* $x = r\cos\theta$

  $y = r\sin\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi$

7.1.3 점, 직선, 원의 관계

* 원-직선 관계

원; $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2-r_c^2=0$

직선; $x=x_0+f\,t$

$y=y_0+g\,t$

$$(x_0-x_c+ft)^2+(y_0-y_c+gt)^2-r_c^2=0$$

=>

$$t=\frac{f(x_c-x_0)+g(y_c-y_0)\pm\sqrt{r_c^2(f^2+g^2)-[f(y_0-y_c)-g(x_0-x_c)]^2}}{f^2+g^2}$$

t; 허근; 만나지 않는 경우

중근; 접촉하는 경우

2개의 실근 ; 교차하는 경우

* 2 원에 접하는 직선

given: $(x_{k,}\,y_k)$, r_k, $(x_{l,}\,y_l)$, r_l

$$ax+by+c=0$$
$$a^2+b^2=1$$

$$ax_k+by_k+c=\pm r_k$$
$$ax_l+by_l\ +c=\pm r_l$$

$$ax_k+by_k+c=\mp r_k$$
$$ax_l+by_l\ +c=\pm r_l$$

$$a=\frac{(\mp r_l\pm r_k)x_{lk}-y_{lk}\sqrt{x_{lk}^2+y_{lk}^2-(\pm r_l\mp r_k)^2}}{x_{lk}^2+y_{lk}^2}$$

$$b=\frac{(\mp r_l\pm r_k)y_{lk}+x_{lk}\sqrt{x_{lk}^2+y_{lk}^2-(\pm r_l\mp r_k)^2}}{x_{lk}^2+y_{lk}^2}$$

$$x_{lk}=x_l-x_k,\quad y_{lk}=y_l-y_k$$

$$c=\mp r_k-ax_k-by_k$$

* 3점을 지나는 원

$$x_{cc}^2 + y_{cc}^2 = r_c^2$$

$$(x_{lk} - x_{cc})^2 + (y_{lk} - y_{cc})^2 = r_c^2$$
$$(x_{mk} - x_{cc})^2 + (y_{mk} - y_{cc})^2 = r_c^2$$
$$x_{ik} = x_i - x_k, \quad y_{ik} = y_i - y_k, \quad i = l, m$$

$$x_{lk}x_{cc} + y_{lk}y_{cc} = (x_{lk}^2 + y_{lk}^2)/2$$
$$x_{mk}x_{cc} + y_{mk}y_{cc} = (x_{mk}^2 + y_{mk}^2)/2$$

$$x_{cc} = \frac{\begin{vmatrix} x_{lk}^2 + y_{lk}^2 & y_{lk} \\ x_{mk}^2 + y_{mk}^2 & y_{mk} \end{vmatrix}}{2\Delta}$$
$$y_{cc} = \frac{\begin{vmatrix} x_{lk} & x_{lk}^2 + y_{lk}^2 \\ x_{mk} & x_{mk}^2 + y_{mk}^2 \end{vmatrix}}{2\Delta}$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{lk} & y_{lk} \\ x_{mk} & y_{mk} \end{vmatrix}$$

=>

$$r_c = \sqrt{x_{cc}^2 + y_{cc}^2}$$
$$x_c = x_{cc} + x_k$$
$$y_c = y_{cc} + y_k$$

7.1.4 직교좌표계상의 곡선의 방정식

conic section curve(원추 단면 곡선)

- 원(circle) ; $x^2 + y^2 - r^2 = 0$
- 타원(ellipse) ; $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$
- 포물선(parabola) ; $y^2 - 4ax = 0$
- 쌍곡선(hyperbolar) ; $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$

곡선 $g(x,y) = 0$ 의 한 점 P(x_1, y_1)에서 접하는 접선, 수직으로 교차하는 법선

Tangent eq.

$$\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x_1, y_1}(x - x_1) + \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{x_1, y_1}(y - y_1) = 0$$

Normal eq.

$$\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{x_1, y_1}(x - x_1) - \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x_1, y_1}(y - y_1) = 0$$

예제 7.7)

매개변수식

원: $x = rcos\theta, \quad y = r\sin\theta$
타원: $x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta$

일반적인 곡선; $x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$
$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$

곡선상의 점 $t = t_1$ 즉 (x_1, y_1) 에서

접선; $x = x(u) = x(t_1) + u\dot{x}(t_1)$
$y = y(u) = y(t_1) + u\dot{y}(t_1)$

$$y = m(x - x(t_1)) + y(t_1); \quad m = \frac{\dot{y}(t_1)}{\dot{x}(t_1)}$$

법선; $x = x(u) = x(t_1) + u\dot{y}(t_1)$
$y = y(u) = y(t_1) - u\dot{x}(t_1)$

예제 7.10)

7.1.5 평면상의 두 점을 잇는 매개변수 곡선의 방정식

직선으로 연결;

$x(t) = a_0 + a_1 t, \quad y(t) = b_0 + b_1 t \; ; \qquad 0 \le t \le 1$

$x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t, \; y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t \; ; \quad 0 \le t \le 1$

곡선으로 연결;

(a) Ferguson curve

given; 점 P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1), 각점에서의 기울기 $m_0(u_0, v_0)$, $m_1(u_1, v_1)$

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \;, \; 0 \le t \le 1 \qquad (7.41)$$
$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$m_0 = \tan\theta_0 = v_0/u_0$

$\dot{x}(0) = \alpha_0 u_0 \,, \; \dot{y}(0) = \alpha_0 v_0$

$m_1 = \tan\theta_1 = v_1/u_1$

$\dot{x}(1) = \alpha_1 u_1 \,, \; \dot{y}(1) = \alpha_1 v_1$

$\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ 또는 d (두 점간의 거리)

$$x(t) = x_0 + u_0 t + (3x_1 - 3x_0 - 2u_0 - u_1)t^2 + (2x_0 - 2x_1 + u_0 + u_1)t^3$$

$x(t) = TCS_x \;, \quad y(t) = TCS_y$; Ferguson curve

$T = [1 \; t \; t^2 \; t^3], \; 0 \le t \le 1$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \;, \quad S_y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

예제 7.11)

(b) Bezier curve

Bernstein polynomial

$P_0(a_0,b_0)$ (t=0) -> $P_3(a_3,b_3)$ (t=1)

$$x(t) = a_0(1-t)^3 + 3a_1 t(1-t)^2 + 3a_2 t^2(1-t) + a_3 t^3 \quad , \; 0 \le t \le 1 \qquad (7.49)$$
$$y(t) = b_0(1-t)^3 + 3b_1 t(1-t)^2 + 3b_2 t^2(1-t) + b_3 t^3$$

$$x(0) = a_0, x(1) = a_3, y(0) = b_0, y(1) = b_3$$
$\dot{x}(0) = 3(a_1 - a_0)$, $\dot{x}(1) = 3(a_3 - a_2)$; 기울기, 접선상에 존재하는 점
$\dot{y}(0) = 3(b_1 - b_0)$, $\dot{y}(1) = 3(b_3 - b_2)$

식 (7.49)을 전개하면,

$$x(t) = a_0 + (-3a_0 + 3a_1)t + (3a_0 - 6a_1 + 3a_2)t^2 + (-a_0 + 3a_1 - 3a_2 + a_3)t^3$$
$$x(t) = (1 - 3t + 3t^2 - t^3)a_0 + (3t - 6t^2 + 3t^3)a_1 + (3t^2 - 3t^3)a_2 + t^3 a_3$$

$x(t) = TMR_x$, $y(t) = TMR_y$; Bezier curve

$T = [1 \; t \; t^2 \; t^3]$, $0 \le t \le 1$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$R_x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad R_y = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

control points (조정점); $P_0(a_0,b_0), P_1(a_1,b_1), P_2(a_2,b_2), P_3(a_3,b_3)$
characteristic polygon (특성다각형); $P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_0$ 로 이루어진 다각형

7.1.6 극좌표 방식에 의한 평면 곡선의 정의

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$r = a + b\theta$; Archimedes curve
cam 설계에 사용
$r = a + b\cos n\theta$